.

13.5. Уравнение Лагранжа. Нелинейные уравнения движения

Постановка задачи. *Механическая система с одной степенью свободы характеризуется нелинейными кинематическими соотношениями. Составить уравнение движения системы.*

План решения

1. Выбираем обобщенную координату. В качестве обобщенной координаты q можно брать угол поворота одного из тел системы или декартову координату какой-либо точки, однозначно описывающую положение системы. Часто обобщенная координата задана в условии задачи.

2. Составляем кинематические графы системы. Выражаем через обобщенную скорость $\dot{q}$ угловые скорости тел и скорости точек приложения активных сил.

3. Вычисляем кинетическую энергию системы.

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot{q}} \left(\sum_{i=1}^{N_1} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N_2} \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i \right).$$

5. Находим частные производные $\partial T/\partial \dot{q}$ и $\partial T/\partial q$ и записываем

уравнение Лагранжа 2-го рода[1]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \tag{1}$$

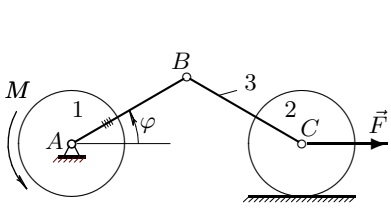


Рис. 1

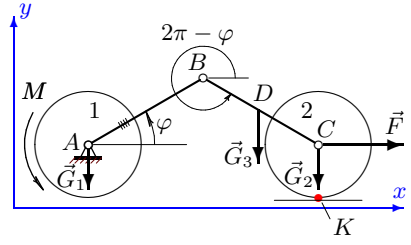


Рис. 2

Пример 1. Рассмотрим механическую систему, приведенную в примере §12.2. Составим для нее уравнение движения (рис. 1).

Решение

Вычисление скоростей и кинетической энергии, т.е. выполнение первых трех пунктов плана, подробнее рассмотрены на с. 243.

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота цилиндра 1, соединенного со стержнем AB.

2. Составляем кинематические графы системы и получаем выражения для скоростей и угловых скоростей:

$$\begin{aligned} &\omega_{BCz} = -\dot{\varphi}, && v_{Cx} = -2a\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ &v_{Dx} = -(3/2)a\dot{\varphi}\sin\varphi, && v_{Dy} = (1/2)a\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий цилиндров и стержня:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B\sin^2\varphi),$$

где A и B константы: $A = m_1R^2/2 + m_3a^2/3$, $B = 2a^2(3m_2 + m_3)$.

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_C + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_D + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_A + \vec{F} \cdot \vec{v}_C).$$

[1]Если кинетическую энергию можно представить в виде $T = 0.5\dot{q}^2 f(q)$, где $f(q)$ — известная функция обобщенной координаты, то уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\ddot{q}f(q) + 0.5\dot{q}^2 f'(q) = Q,$$

где $f'(q) = df/dq$.

Горизонтальная плоскость, по которой катится цилиндр, и шарнир, на котором закреплен цилиндр 1, являются идеальными связями. Виртуальные мощности этих реакций равны нулю, и в выражение для Q эти силы не входят. Аналогично, не входит в обобщенную силу и сила трения, приложенная при отсутствии проскальзывания к неподвижной точке (точке касания поверхности) цилиндра 2. Учитывая выражения для векторов сил,

$$\vec{G}_i = \{0,\ -m_i g,\ 0\}, i = 1...3,\ \vec{F} = \{F,\ 0,\ 0\},$$

момента $\vec{M} = \{0,\ 0,\ M\}$, выражение $\vec{\omega}_A = \{0,\ 0,\ \dot{\varphi}\}$ и соотношения (2), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = M - 0.5 m_3 a g \cos\varphi - 2aF \sin\varphi.$$

5. Находим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} B \sin 2\varphi,$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + \dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi = M - 0.5 m_3 a g \cos\varphi - 2aF \sin\varphi.$$

Пример 2. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 3). Кривошипно-кулисный механизм состоит из маховика 1, кулисы 2, двигателя со шкивом 3, катка 4 и штока 5. К шкиву 3 приложен момент двигателя $M_z = M_0 - k\omega_{3z}$. Каток своим внешним ободом катится без проскальзывания и без трения качения по горизонтальной поверхности. Внутренним ободом каток также без проскальзывания приводит в движение шток, к которому приложена полезная нагрузка, моделируемая силой $F_x = -\mu v_{5x}$. Трением пальца A в прорези кулисы 2 пренебрегаем. Шкив 3 считаем однородным цилиндром, момент инерции маховика 1 вместе с пальцем A, закрепленным на нем, равен $J_1 = 2.5$ кг м^2. Даны массы: $m_A = 1$ кг, $m_2 = 15$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 16$ кг, массу штока 5 считать равной нулю. Даны радиусы: $R_1 = 0.4$ м, $O_1A = r_1 = 0.1$ м, $R_3 = 0.3$ м, $r_4 = 0.2$ м, $R_4 = 0.41$ м;

радиус инерции $i_4 = 0.32$ м. Пусковой момент $M_0 = -30$ Нм; крутизна статической характеристики двигателя $k = 0.2$ Нмс; коэффициент сопротивления $\mu = 950$ Н с/м. Составить уравнение движения системы[2].

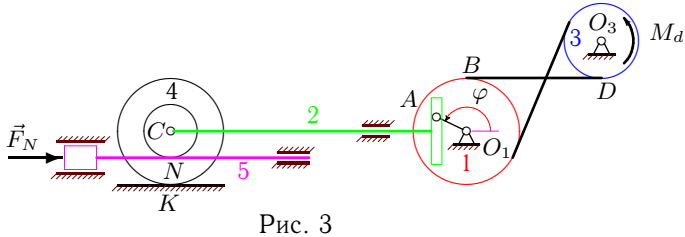


Рис. 3

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота шкива 1, отсчитываемый от горизонтальной оси x (направленной, как всегда, направо) против часовой стрелки.

2. Составляем кинематические графы системы:

$$O_1 \xrightarrow[\varphi]{r_1} A\,; \quad O_1 \xrightarrow[\pi/2]{R_1} B\,; \quad D \xrightarrow[\pi/2]{R_3} O_3\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4} C\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4 - r_4} N$$

Точка K является точкой касания внешнего обода блока 4 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому $\vec{v}_K = 0$. Шток 5 касается внутреннего обода блока 4 в точке N, скорость штока $v_{5x} = v_{Nx}$. Получаем выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= -r_1\dot{\varphi}\sin\varphi, & v_{Ay} &= r_1\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ v_{Bx} &= -R_1\dot{\varphi}, & v_{Dx} &= R_3\omega_{3z}, \\ v_{Cx} &= -R_4\omega_{4z}, & v_{Nx} &= v_{5x} = -(R_4 - r_4)\omega_{4z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Нить BD нерастяжимая, отсюда следует кинематическая связь: $v_{Dx} = v_{Bx}$. Вместе с (3) это дает $\omega_{3z} = -(R_1/R_3)\dot{\varphi}$, т.е. тела 3 и 1 вращаются в разные стороны. Так как шток 2 кулисы является жестким, то $v_{Ax} = v_{Cx}$. Отсюда находим угловую скорость блока 4 $\omega_{4z} = (r_1/R_4)\dot{\varphi}\sin\varphi$ и скорость штока $v_{5x} = -(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi$.

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий четырех тел. Маховик 1 с моментом инерции J_1 и

[2]За основу задачи взято задание Д-5 из сборника И.В.Новожилова, М.Ф.Зацепина, "Типовые задания по теоретической механике", М.:1986.

шкив 3 с моментом инерции $m_3R_3^2/2$ вращаются, каток 4 совершает плоское движение, а кулиса 2 — поступательное:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{J_1\dot\varphi^2}{2} + \frac{m_2(r_1\dot\varphi\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_3R_3^2}{2}\,\frac{(\dot\varphi R_1/R_3)^2}{2} + \\ + \frac{m_4(r_1\dot\varphi\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_4i_4^2(r_1/R_4\dot\varphi\sin\varphi)^2}{2}.$$

Для удобства вычислений представим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}(A + B\sin^2\varphi), \tag{4}$$

где $A = J_1 + m_3R_1^2/2,\ B = m_2r_1^2 + m_4(i_4r_1/R_4)^2 + m_4r_1^2$.

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_A\cdot\vec v_A + \vec F_N\cdot\vec v_5 + \vec M_d\cdot\vec\omega_3).$$

Учитывая выражения для векторов

$$\vec G_A = \{0,\ -m_Ag,\ 0\}, \qquad \vec v_A = \{-r_1\dot\varphi\sin\varphi,\ r_1\dot\varphi\cos\varphi,\ 0\},$$
$$\vec F_N = \{-\mu v_{5x},\ 0,\ 0\}, \qquad \vec v_5 = \{-(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot\varphi\sin\varphi,\ 0,\ 0\},$$
$$\vec M_d = \{0,\ 0,\ M_0 - k\omega_{3z}\}, \quad \vec\omega_3 = \{0,\ 0,\ -(R_1/R_3)\dot\varphi\},$$

получаем в результате обобщенную силу, которую представляем в виде суммы $Q = Q_N + Q_T + Q_d$, где $Q_N = -\mu(r_1(R_4 - r_4)/R_4\sin\varphi)^2\dot\varphi$, $Q_T = -m_Agr_1\cos\varphi$, $Q_d = -(M_0 + k\dot\varphi R_1/R_3)R_1/R_3$.

5. Находим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.5\dot\varphi^2B\sin 2\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi(A + B\sin^2\varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right) = \ddot\varphi(A + B\sin^2\varphi) + \dot\varphi^2B\sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot\varphi(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot\varphi^2B\sin 2\varphi = Q_T + Q_N + Q_d. \tag{5}$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение движения системы может быть проинтегрировано численно.

Пример 3. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 4).

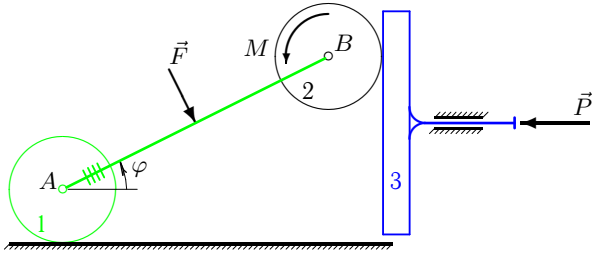


Рис. 4

Система состоит из двух однородных дисков 1, 2 одинакового радиуса R, невесомого стержня AB длиной a и поршня 3, перемещающегося в горизонтальных направляющих. Стержень AB жестко скреплен с диском 1. Диск 1 катается по горизонтальной поверхности, а диск 2 — по вертикальной поверхности поршня. Качение происходит без проскальзывания и без трения качения. Массы дисков m_1 и m_2, масса поршня m_3. К середине стержня приложена сила F, направленная перпендикулярно AB. На поршень действует горизонтальная сила P, а на диск 2 — пара с моментом M. Составить уравнение движения системы.

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота стержня AB, отсчитываемый от горизонтальной оси x (рис. 5).

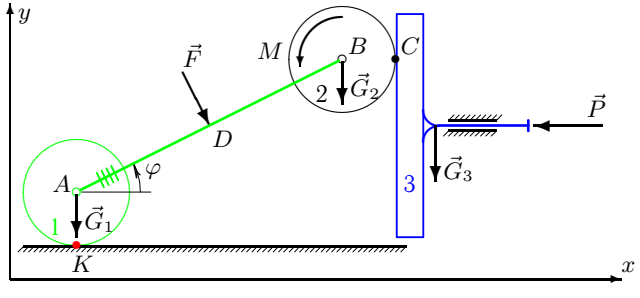


Рис. 5

2. Составляем кинематические графы системы. В качестве начальных и конечных вершин графов берем те точки, скорости которых необходимо вычислить (A, B, D) или те, в которых по условию зада-

чи задана какая-либо кинематическая связь (K, C):

$$K \xrightarrow[\pi/2]{1} A\,; \quad A \xrightarrow[\varphi]{a} B\,; \quad B \xrightarrow[0]{2} C\,; \quad A \xrightarrow[\varphi]{0.5a} D \tag{6}$$

Записываем уравнения для проекций скоростей, соответствующие графам (6):

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Kx} - R\dot\varphi \sin\pi/2, & v_{Ay} &= v_{Ky} + R\dot\varphi\cos\pi/2,\\ v_{Bx} &= v_{Ax} - a\dot\varphi\sin\varphi, & v_{By} &= v_{Ay} + a\dot\varphi\cos\varphi,\\ v_{Cx} &= v_{Bx} - R\omega_{2z}\sin 0, & v_{Cy} &= v_{By} + R\omega_{2z}\cos 0,\\ v_{Dx} &= v_{Ax} - 0.5a\dot\varphi\sin\varphi, & v_{Dy} &= v_{Ay} + 0.5a\dot\varphi\cos\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

Точка K является точкой касания обода диска 1 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому

$$v_{Kx} = 0,\ v_{Ky} = 0. \tag{8}$$

Поршень 3 и диск находятся в зацеплении в точке C. Поршень движется поступательно и вертикальные компоненты всех его точек, включая и точку C, равны нулю:

$$v_{Cy} = 0. \tag{9}$$

С учетом соотношений (8,9) из системы уравнений (7) получаем выражения для скоростей и угловых скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= -R\dot\varphi, & v_{Ay} &= 0,\\ v_{Bx} &= -\dot\varphi(R + a\sin\varphi), & v_{By} &= \dot\varphi\, a\cos\varphi,\\ v_{Dx} &= -\dot\varphi(R + 0.5a\sin\varphi), & v_{Dy} &= 0.5\dot\varphi\, a\cos\varphi,\\ \omega_{2z} &= -\dot\varphi(a/R)\cos\varphi, & v_{Cx} &= -\dot\varphi(R + a\sin\varphi). \end{aligned} \tag{10}$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий трех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Однородный диск 1 катится без проскальзывания по неподвижной поверхности и совершает плоское движение, поэтому

$$T_1 = \frac{3m_1 v_A^2}{4} = \frac{3m_1 R^2\dot\varphi^2}{4}.$$

Диск 2 также совершает плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2}.$$

Момент инерции диска $J_2 = m_2 R^2/2$. С учетом (10) получаем

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 (R^2 + a^2 + 2Ra\sin\varphi)}{2} + \frac{m_2 \dot{\varphi}^2\, a^2 \cos^2\varphi}{4}.$$

Кинетическая энергия поступательного движения поршня 3

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} = \frac{m_3 \dot{\varphi}^2 (R + a\sin\varphi)^2}{2}.$$

Кинетическую энергию всего механизма для удобства вычислений представляем в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi),$$

где для констант введены обозначения: $A = (1.5m_1 + m_2 + m_3)R^2 + 1.5m_2a^2$, $B = 2\,R\,a\,(m_2 + m_3)$, $C = a^2(m_3 - m_2/2)$.

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_B + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_C + \vec{F} \cdot \vec{v}_D + \vec{P} \cdot \vec{v}_C + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_2).$$

Учитывая следующие выражения для векторов,

$$\vec{G}_1 = \{0,\ -m_1 g,\ 0\}, \quad \vec{G}_2 = \{0,\ -m_2 g,\ 0\}, \vec{G}_3 = \{0,\ -m_3 g,\ 0\},$$
$$\vec{F} = \{F\sin\varphi,\ -F\cos\varphi,\ 0\},\ \vec{P} = \{-P,\ 0,\ 0\},\ \vec{M} = \{0,\ 0,\ M\},$$

и соотношения (10), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = -m_2\, g\, a\cos\varphi - F\,(0.5a + R\sin\varphi) + P\,(R + a\sin\varphi) - M\,(a/R)\cos\varphi.$$

5. Находим частные производные,

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.5\,\dot{\varphi}^2(B\cos\varphi + C\sin 2\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\,(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \ddot{\varphi}(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi) + \dot{\varphi}^2(B\cos\varphi + C\sin 2\varphi).$$

Записываем уравнение движения системы:

$$\ddot{\varphi}(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2(B\cos\varphi + C\sin 2\varphi) =$$
$$= (P\,a - F\,R)\sin\varphi - (m_2\,g + M/R)a\cos\varphi + P\,R - 0.5Fa.$$

Пример 4. Механическая система с одной степенью свободы с нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 6) состоит из однородного диска 1 радиусом R, стержня 2 длиной a и невесомого штока, двигающегося без трения в вертикальных направляющих. Диск 1 вращается на оси, закрепленной в нижней точке штока.

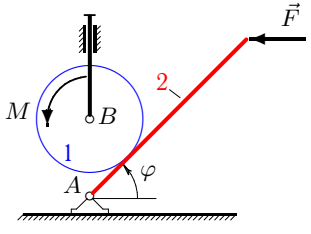


Рис. 6

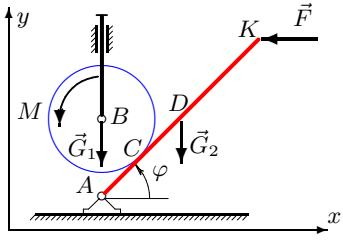


Рис. 7

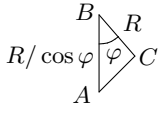


Рис. 8

Стержень 2, вращаясь вокруг неподвижного шарнира A, касается диска. Диск катится по стержню без сопротивления и проскальзывания. Шток и шарнир A находятся на одной вертикали. К концу стержня приложена горизонтальная сила F, к диску — момент M. Масса диска — m_1, масса стержня — m_2. Составить уравнение движения системы.

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота стержня 2, отсчитываемый от горизонтальной оси x (рис. 7).

2. Составляем кинематические графы системы:

$$A \xrightarrow[\varphi]{2} C \xrightarrow[\varphi+\pi/2]{1} B\,; \qquad A \xrightarrow[\varphi]{2} D\,; \qquad A \xrightarrow[\varphi]{2} K \tag{11}$$

Из треугольника ABC (рис. 8) имеем $AC = R\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Записываем уравнения для проекций скоростей, соответствующие графам (11):

$$
\begin{aligned}
&v_{Bx} = v_{Ax} - R\,\dot\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi - R\,\omega_{1z}\sin(\varphi+\pi/2),\\
&v_{By} = v_{Ay} + R\,\dot\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\varphi + R\,\omega_{1z}\cos(\varphi+\pi/2),\\
&v_{Dx} = v_{Ax} - 0.5a\,\dot\varphi\sin\varphi,\ \ v_{Dy} = v_{Ay} + 0.5a\,\dot\varphi\cos\varphi,\\
&v_{Kx} = v_{Ax} - a\,\dot\varphi\sin\varphi,\ \ v_{Ky} = v_{Ay} + a\,\dot\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Шарнир A неподвижен: $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$; точка B движется только по вертикали: $v_{Bx} = 0$. С учетом этих соотношений из системы уравнений (12) получаем выражения для линейных и угловых скоростей:

$$
\begin{aligned}
&v_{By} = R\,\dot\varphi\sin\varphi/\cos^2\varphi, && \omega_{1z} = -\dot\varphi\ \mathrm{tg}^2\,\varphi,\\
&v_{Dx} = -0.5\dot\varphi a\sin\varphi, && v_{Dy} = 0.5\dot\varphi a\cos\varphi,\\
&v_{Kx} = -\dot\varphi\,a\,\sin\varphi, && v_{Ky} = \dot\varphi\,a\,\cos\varphi.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Заметим, что скорость v_{By} можно получить координатным методом, дифференцируя по времени выражение $y_B(t)$ (рис. 8):

$$
v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = \frac{d(y_A + R/\cos\varphi)}{dt} = R\,\dot\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.
$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий диска и стержня: $T = T_1 + T_2$. Однородный диск 1 совершает плоское движение, поэтому

$$
T_1 = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \frac{J_1\omega_{1z}^2}{2}.
$$

Момент инерции диска — $J_1 = m_1R^2/2$. С учетом (13) получаем

$$
T_1 = \frac{m_1\dot\varphi^2R^2}{4}(2\sin^2\varphi\cos^{-4}\varphi + \mathrm{tg}^4\,\varphi).
$$

Кинетическая энергия вращения стержня 2 равна $T_2 = J_2\dot\varphi^2/2$, где $J_2 = m_2a^2/3$ — момент инерции стержня относительно конца (точки A). Отсюда получаем, что $T_2 = m_2a^2\dot\varphi^2/6$. Кинетическую энергию всего механизма для удобства вычислений представляем в виде

$$
T = \frac{\dot\varphi^2}{2}\left(A + B\frac{(3-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right),
$$

где для констант вводим обозначения $A = m_2a^2/3,\ B = m_1R^2/2$.

4. Вычисляем обобщенную силу Q:

$$
Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_1\cdot\vec v_B + \vec G_2\cdot\vec v_D + \vec F\cdot\vec v_K + \vec M\cdot\vec\omega_1).
$$

Учитывая выражения для векторов

$$\vec{G}_1 = \{0,\ -m_1 g,\ 0\},\ \vec{G}_2 = \{0,\ -m_2 g,\ 0\},$$
$$\vec{F} = \{-F,\ 0,\ 0\},\quad \vec{M} = \{0,\ 0,\ M\},$$

и соотношения (13), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = -m_1\, gR \sin\varphi / \cos^2\varphi - 0.5 m_2 ga\cos\varphi + Fa\sin\varphi - M\ \mathrm{tg}^2\,\varphi.$$

5. Кинетическую энергию записываем виде $T = 0.5\dot{\varphi}^2 f(\varphi)$, где

$$f(\varphi) = A + B\frac{(3-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}.$$

В этом случае, согласно примечанию на с. 308, уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\ddot{\varphi} f(\varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2 f'(\varphi) = Q,$$

где

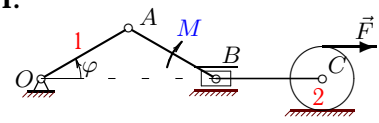
$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 4B\frac{(3-2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^5\varphi}.$$

В результате получаем уравнение движения системы:

$$\ddot{\varphi}\left(A + B\frac{(3-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right) + 2B\dot{\varphi}^2\frac{(3-2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^5\varphi} =$$
$$= -m_1\, gR\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}m_2 ga\cos\varphi + Fa\sin\varphi - M\ \mathrm{tg}^2\,\varphi.$$

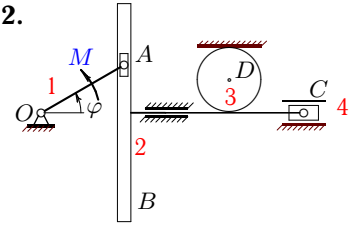
Условия задач. *Механическая система с одной степенью свободы характеризуется нелинейными кинематическими соотношениями. Все диски (цилиндры) считать однородными. Качение происходит без проскальзывания. Составить уравнение движения системы. Даны массы* $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 8$ кг, $m_4 = 1$ кг.

1.



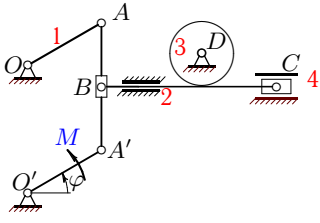
Механизм приводится в движение моментом M. Кривошип OA имеет массу m_1, диск C — m_2; $OA = AB = = a$, массой ползуна B, стержней AB и BC пренебречь.

2.



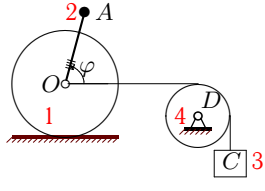
Механизм приводится в движение моментом M. Ползун A считать невесомым, кривошип OA имеет массу m_1, кулиса B — m_2, диск D — m_3, ползун C — m_4; $OA = a$.

3.



Шарнирный параллелограмм приводится в движение моментом M. Спарник AA' считать невесомым, звенья OA и $O'A'$ имеют одинаковую массу m_1. Ползун B вместе со стержнем BC имеет массу m_2, масса диска D — m_3, ползуна C — m_4; $OA = a$.

4.

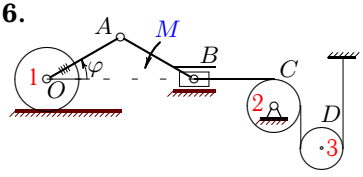


Диск O радиусом R массой m_1 соединен с невесомым стержнем $OA = a$, на конце которого закреплен груз A массой m_2. Груз C имеет массу m_3, шкив D — m_4.

5.

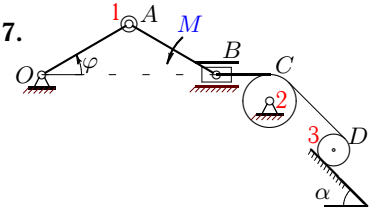
Ползун A массой m_1, скользящий по гладкой вертикальной поверхности, соединен с центром цилиндра O невесомым стержнем $AO = a$. Цилиндр O имеет массу m_2, диск D — m_3, груз C — m_4.

6.



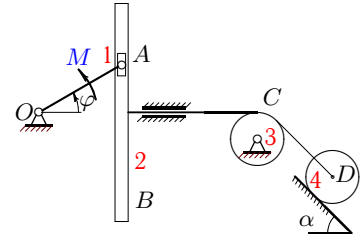
Диск O радиусом R, имеющий массу m_1, соединен с невесомым стержнем OA. Механизм приводится в движение моментом M. Массы дисков C и D m_2 и m_3, $OA = AB = a$, массой ползуна B и стержня AB пренебречь.

7.



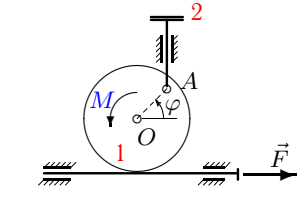
Механизм приводится в движение моментом M. Кривошип OA считать невесомым. В шарнире A сосредоточена масса m_1. Массы дисков C и D — m_2 и m_3; $OA = AB = a$, массой ползуна B и стержня AB пренебречь.

8.



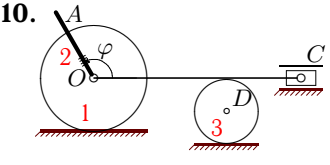
Механизм приводится в движение моментом M. Кривошип OA считать невесомым. Ползун A имеет массу m_1, кулиса B — m_2, массы дисков C и D — m_3 и m_4; $OA = a$.

9.



Однородный диск 1 массой m_1 радиусом R шарнирно соединен в точке A с вертикально движущимся штоком 2 массой m_2. Диск без сопротивления катится по горизонтальному штоку; $OA = a$. К горизонтальному штоку приложена сила F, к диску — момент M.

10.



Диск O радиусом R массой m_1 соединен с однородным стержнем $OA = a$ массой m_2. Масса диска D — m_3. Массой ползуна и стержня OC пренебречь.

Ответы

1. $2\ddot{\varphi}a^2(1+6\sin^2\varphi)+6\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi = M-3ag\cos\varphi-4\,a\,F\,\sin\varphi.$

2. $2\ddot{\varphi}a^2(1+3\sin^2\varphi)+3\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi = M-3ag\cos\varphi.$

3. $\ddot{\varphi}a^2(4+7\sin^2\varphi)+(7/2)\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi = M-6ag\cos\varphi.$

4. $\ddot{\varphi}(2a^2+24.5R^2+4Ra\sin\varphi)+2\dot{\varphi}^2aR\cos\varphi = -2ag\cos\varphi-8gR.$

5. $\ddot{\varphi}a^2(6+17\sin^2\varphi)+8.5\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi = 2ag(3\cos\varphi-\sin\varphi).$

6. $\ddot{\varphi}(9R^2+4(R+2a\sin\varphi)^2)+8a\dot{\varphi}^2(R+2a\sin\varphi)\cos\varphi =$
$= -M-4g(R+2a\sin\varphi).$

7. $2\ddot{\varphi}a^2(3+8\sin^2\varphi)+8\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi = -M-8ag\sin\varphi\sin\alpha.$

8. $\ddot{\varphi}a^2(6+7.5\sin^2\varphi)+3.75\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi = M-ag\sin\varphi\sin\alpha.$

9. $\ddot{\varphi}(3R^2+2a^2+4a^2\sin^2\varphi)+2\dot{\varphi}^2a^2\sin 2\varphi =$
$= M+(R+a\sin\varphi)F-2a\,g\,\cos\varphi.$

10. $\ddot{\varphi}(2a^2/3+2Ra\sin\varphi+14R^2)+\dot{\varphi}^2Ra\cos\varphi = -3ag\cos\varphi.$