

М. Н. Кирсанов

# **СБОРНИК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ**

**по динамике**

---

Москва  
Издательство МЭИ  
2004

УДК 531.3  
ББК 22.213  
К 435

**Кирсанов М. Н.** Сборник экзаменационных задач по динамике. — М.,  
Издательство МЭИ, 2004. — ?? с. — ISBN 5-7046-1168-0.

Изложены условия и примеры решения экзаменационных задач по семи темам теоретической механики. Для каждой задачи дано от 30 до 120 вариантов условий. Для самопроверки приведены числовые значения и ответы.

Книга может быть использована как при очной, так и при дистанционной формах обучения.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

Ил. 30.

**ISBN 5-7046-1168-0**

© Кирсанов М. Н., 2004

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие . . . . .                                              | 4         |
| <b>I. Система с одной степенью свободы . . . . .</b>               | <b>5</b>  |
| Условия задач . . . . .                                            | 5         |
| Примеры решений . . . . .                                          | 30        |
| <b>II. Система с двумя степенями свободы (три тела) . . . . .</b>  | <b>44</b> |
| Условия задач . . . . .                                            | 44        |
| Примеры решений . . . . .                                          | 49        |
| <b>III. Система с двумя степенями свободы (пять тел) . . . . .</b> | <b>54</b> |
| Условия задач . . . . .                                            | 54        |
| Примеры решения . . . . .                                          | 57        |
| <b>IV. Колебание системы с двумя степенями свободы . . . . .</b>   | <b>63</b> |
| Условия задач . . . . .                                            | 63        |
| Пример решения . . . . .                                           | 66        |
| <b>V. Колебание узла фермы . . . . .</b>                           | <b>71</b> |
| Условия задач . . . . .                                            | 71        |
| Пример решения . . . . .                                           | 75        |
| <b>VI. Предельные частоты системы . . . . .</b>                    | <b>80</b> |
| Условия задач . . . . .                                            | 80        |
| Пример решения . . . . .                                           | 84        |
| <b>VII. Стабильность движения . . . . .</b>                        | <b>87</b> |
| Условия задач . . . . .                                            | 87        |
| Пример решения . . . . .                                           | 88        |
| Библиографический список . . . . .                                 | 90        |

## Предисловие

В сборнике даны экзаменационных задач по семи темам динамики курса теоретической механики. Основное внимание уделяется задачам на составление уравнения Лагранжа 2-го рода.

В **задачах 1.1 – 1.120** надо составить уравнение движения системы с одной степенью свободы. Экзаменационный билет в МЭИ(ТУ) по курсу теоретической механики обычно включает в себя такую задачу. В сборнике приведены условия задач и даны решения восьми наиболее трудных вариантов. Для решения используется удобный и наглядный метод кинематических графов [8]. Для некоторых задач даны краткие ответы (кинетическая энергия и обобщенная сила). Четыре аналогичные задачи на составление уравнения Лагранжа разобраны в Решебнике [6].

В **задачах 2.1 – 44, 3.1 – 30** даны системы с двумя степенями свободы.

В **задачах 4.1 – 30, 5.1 – 30** определяются собственные частоты колебаний механических систем. Задача о колебании узла фермы (**задачи 5.1 – 30**) является характерной экзаменационной задачей — для ее решения требуется знание статики и динамики.

В **задачах 6.1 – 30** помимо собственных частот определяются и предельные. Под предельными частотами понимаются значения собственных частот при неограниченном увеличении масс отдельных тел системы. Если предел собственной частоты, при стремлении некоторой массы к бесконечности равен нулю, то считается, что предельной частоты для этой массы нет.

**Задачи 7.1 – 30** являются экзаменационными по курсу моделирования робототехнических систем (МЭИ).

Числовые значения и ответы, данные во всех задачах (кроме **1.1 – 1.120**), рассчитаны на письменный экзамен (2 часа) или для самоконтроля при подготовке к экзамену. Для устного экзамена (подготовка 1 час) эти задачи должны быть решены в общем виде, без упрощений, преобразований и подстановок в окончательный ответ промежуточных и числовых значений.

# I

## СИСТЕМА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### Условия задач

Во всех задачах сделаны обычные предположения — цилиндры, диски, колеса катятся без проскальзывания и без трения качения, нити нерастяжимы и невесомы. Трение в шарнирах отсутствует. Если не оговорено дополнительно, направления нитей, стержней, сил и положения плоскостей принимать в зависимости от их изображения вертикальными или горизонтальными. Вопросы отрыва тел от опор не рассматриваются.

Следует помнить также, что движение определяется не только заданными силами, но и начальными условиями. Поэтому всякие сомнения о возможности движения механизма здесь излишни, в задаче не даны ни величины сил, ни массы, ни начальные условия. Во всех задачах только два тела наделены массой, остальные следует принять невесомыми. Если не оговорено дополнительно, механизм расположен в вертикальной плоскости.

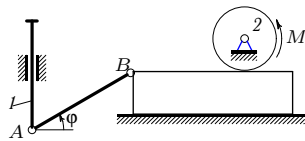
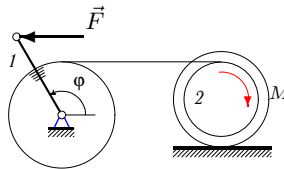
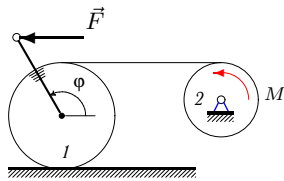
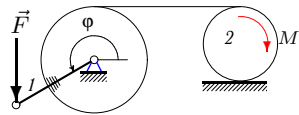
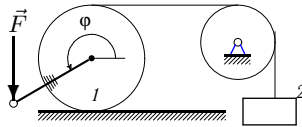
При решении некоторых задач иногда возникает вопрос о некоторых незаданных в условии величинах, чаще всего кажется, что не задан какой-либо радиус или длина. В таких случаях рекомендуется ввести эту величину, при правильном решении она сократится и в ответ не войдет.

Задачи получены специальной программой-генератором. Для каждого базового условия генератор дает восемь вариантов отличающиеся массами, нагрузками или обобщенными координатами.

Механизмы данные в задачах используются в цепях автоматического регулирования, как клапаны, пусковые или другие служебные устройства. Объединяет их одно свойство — нелинейная зависимость движения от нагрузок. Для механизмов с такими свойствами применение уравнения Лагранжа 2-го рода особенно эффективно.

*В задачах 1.1-1.120 составить уравнение движения системы.*

К задачам, помеченным звездочкой \*, даны ответы на с. ??, ??.



**1.1.\*** Цилиндр массой  $m_1$  жестко соединен с невесомым стержнем длиной  $a$ , к которому приложена вертикальная сила  $F$ . Радиус цилиндра  $R$ . Нить параллельная основанию, по которому катится цилиндр, связывает его с грузом массой  $m_2$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

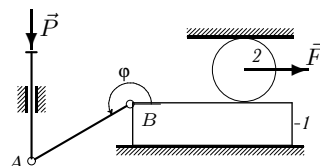
**1.2.** Цилиндр жестко соединен с однородным стержнем массой  $m_1$  длиной  $a$ , к которому приложена вертикальная сила  $F$ . Радиус цилиндра  $R$ . Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси и нитью связан с диском массой  $m_2$  и радиусом  $r$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.3.** Цилиндр массой  $m_1$  и радиусом  $R$  жестко соединен с невесомым стержнем длиной  $a$ . Нить, параллельная основанию, по которому катится цилиндр, связывает его с диском массой  $m_2$  и радиусом  $r$ . За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

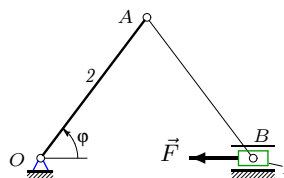
**1.4.** Цилиндр радиусом  $R$  жестко соединен с однородным стержнем массой  $m_1$  и длиной  $a$ . Цилиндр вращается вокруг неподвижной оси и нитью связан с внутренним ободом блока массой  $m_2$ . Радиусы блока  $R_0$  и  $r_0$ , момент инерции  $J_0$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.5.\*** Стержень  $AB = a$  соединяет вертикальный поршень массой  $m_1$  и горизонтально движущийся брусок. Брусок вращает цилиндр радиусом  $R$  и массой  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

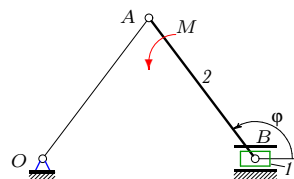
**1.6.** Стержень  $AB = a$  соединяет вертикальный поршень и горизонтально движущийся брусок массой  $m_1$ . Цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_2$  катится по бруску и горизонтальной поверхности. К оси цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



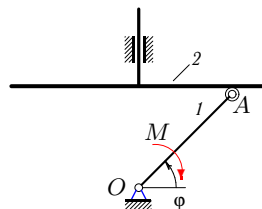
**1.7.\*** Механизм состоит из двух стержней одинаковой длины  $OA = AB = a$  и горизонтально движущегося ползуна  $B$  массой  $m_1$ . К ползуну приложена горизонтальная сила  $F$ . Масса стержня  $OA$  равна  $m_2$ , массой стержня  $AB$  пренебречь. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



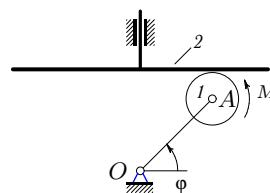
**1.8.** Механизм состоит из двух стержней одинаковой длины  $OA = AB = a$  и горизонтально движущегося ползуна  $B$  массой  $m_1$ . К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ . Масса стержня  $AB$  равна  $m_2$ , массой стержня  $OA$  пренебречь. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

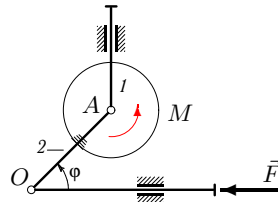
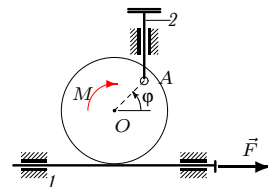
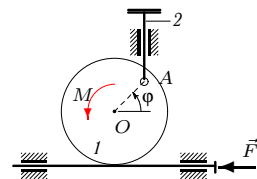
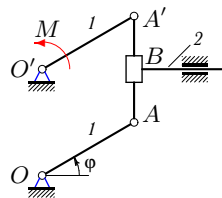
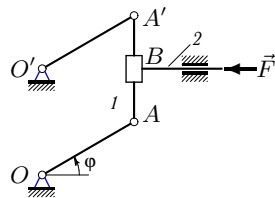


**1.9.** Кривошип  $OA = a$  массой  $m_1$  приводит в движение вертикально движущийся поршень массой  $m_2$ . Колесико  $A$  катается без сопротивления и без отрыва по нижней поверхности поршня. Размерами колесика пренебречь. Момент  $M$  приложен к  $OA$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.10.\*** Невесомый кривошип  $OA = a$  приводит в движение колесо  $1$  массой  $m_1$  и вертикально движущийся поршень массой  $m_2$ . Колесо  $A$  радиусом  $R$  катается без сопротивления и без отрыва по нижней поверхности поршня. Момент  $M$  приложен к колесу. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.11.** Шарнирный параллелограмм состоит из стержней  $OA$ ,  $A'O'$  и стержня  $AA'$  массой  $m_1$ . К штоку приложена сила  $F$ . Общая масса муфты  $B$  и горизонтально движущегося штока равна  $m_2$ ;  $OA = O'A' = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

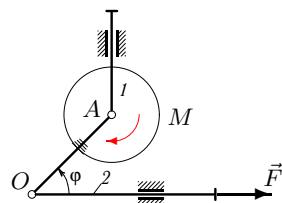
**1.12.** Шарнирный параллелограмм состоит из стержней  $OA$ ,  $A'O'$  массой  $m_1$  каждый и невесомого стержня  $AA'$ . К стержню  $O'A'$  приложен момент  $M$ . Общая масса муфты  $B$  и горизонтально движущегося штока равна  $m_2$ ;  $OA = O'A' = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.13.** Однородный диск  $1$  массой  $m_1$  и радиусом  $R$  шарнирно соединен в точке  $A$  с вертикально движущимся штоком  $2$  массой  $m_2$ . Диск катится по горизонтальному подвижному штоку.  $OA = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

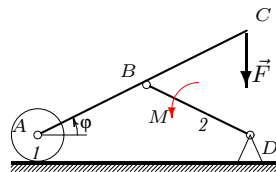
**1.14.** Горизонтальный шток  $1$  массой  $m_1$  приводится в движение невесомым диском радиусом  $R$ , катящимся по штоку. Диск шарнирно соединен в точке  $A$  с вертикально движущимся штоком  $2$  массой  $m_2$ .  $OA = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.15.** На вертикальном штоке шарнирно закреплен однородный диск  $1$  радиусом  $R$  и массой  $m_1$ . Диск жестко соединен со стержнем  $2$  массой  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ ;  $AO = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

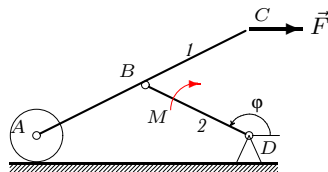
**1.16.** На вертикальном штоке шарнирно закреплен однородный диск  $I$  радиусом  $R$  массой  $m_1$ . Диск жестко соединен со стержнем  $AO$ . Масса горизонтального штока —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ ;  $AO = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



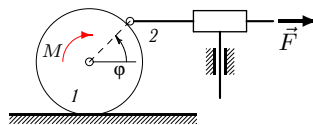
**1.17.\*** Механизм состоит из стержня  $AC$ , цилиндра массой  $m_1$  и кривошипа  $BD$  массой  $m_2$ . Цилиндр катится по горизонтальной плоскости. На стержень действует вертикальная сила  $F$ , на кривошип — момент  $M$ .  $AB = BC = BD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



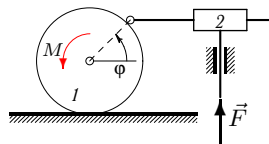
**1.18.** Механизм состоит из стержня  $AC$  массой  $m_1$ , цилиндра и кривошипа  $BD$  массой  $m_2$ . Цилиндр катится по горизонтальной плоскости. На стержень действует горизонтальная сила  $F$ , на кривошип — момент  $M$ .  $AB = BC = BD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

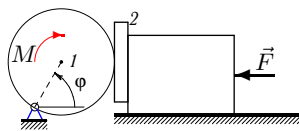
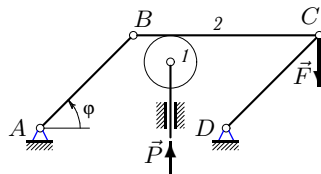
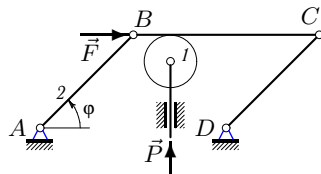
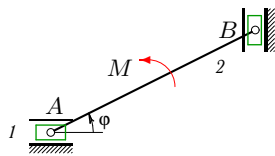
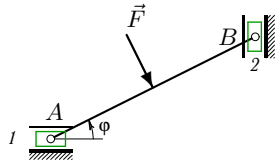


**1.19.\*** Сквозь муфту, закрепленную на вертикальном штоке, скользит горизонтальный стержень, соединенный шарниром с ободом цилиндра. Масса цилиндра  $m_1$ , радиус  $R$ . Масса стержня  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к стержню — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.20.** Сквозь муфту, закрепленную на вертикальном штоке, скользит горизонтальный стержень, соединенный шарниром с ободом цилиндра. Масса цилиндра  $m_1$ , радиус —  $R$ . Масса муфты  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.21.\*** Горизонтально движущийся ползун  $A$  массой  $m_1$  соединен с вертикально движущимся ползуном  $B$  массой  $m_2$ . Массой стержня  $AB$  пренебречь;  $AB = a$ . К середине стержня приложена сила  $F$ , перпендикулярная стержню. За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$ .

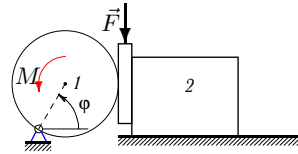
**1.22.** Горизонтально движущийся ползун  $A$  массой  $m_1$  соединен стержнем с вертикально движущимся невесомым ползуном  $B$ . Масса однородного стержня  $AB$  равна  $m_2$ .  $AB = a$ . К стержню приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.23.** Диск массой  $m_1$  шарнирно закреплен на штоке и катится без проскальзывания по звену  $BC$  шарнирного параллелограмма, расположенного в горизонтальной плоскости. Масса  $AB$  равна  $m_2$ . На шток действует сила  $P$ , на звено  $BC$  — сила  $F$ .  $AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

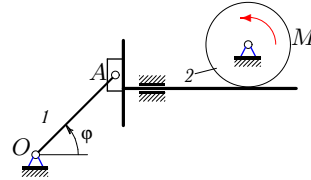
**1.24.** Диск массой  $m_1$  шарнирно закреплен на штоке и катится без проскальзывания по звену  $BC$  шарнирного параллелограмма, расположенного в горизонтальной плоскости;  $AB = a$ . Масса  $BC$  равна  $m_2$ . На шток действует сила  $P$ , на шарнир  $C$  — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.25.\*** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , вращаясь вокруг оси, проходящей через его обод, находится в зацеплении с тонкой пластиной массой  $m_2$ . Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска. К цилиндру приложен момент  $M$ , к бруску — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

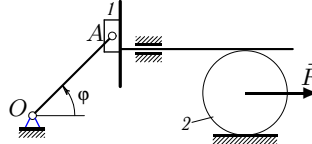
**1.26.** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , вращаясь вокруг оси, проходящей через его обод, находится в зацеплении с тонкой пластиной. Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска массой  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — вертикальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



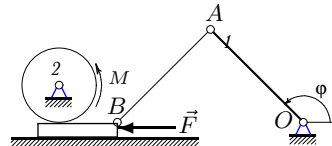
**1.27.** Брусок  $A$ , закрепленный на кривошипе  $OA = a$  массой  $m_1$ , скользит по поверхности горизонтально движущегося поршня. Поршень приводит в движение цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .



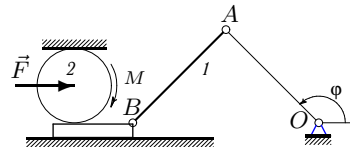
**1.28.** Брусок  $A$  массой  $m_1$ , закрепленный на кривошипе  $OA = a$ , скользит по поверхности горизонтально движущегося поршня. Поршень приводит в движение цилиндр массой  $m_2$ . К оси цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

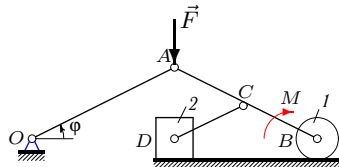
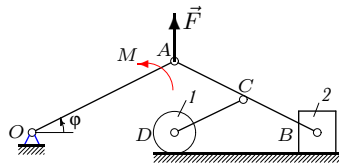
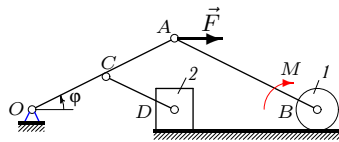
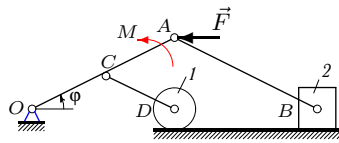
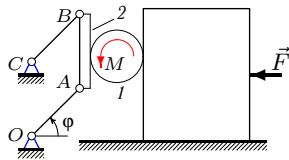
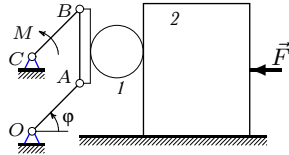


**1.29.** Тонкий брусок скользит по горизонтальной поверхности и приводит в движение цилиндр. Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , масса цилиндра радиусом  $R$  —  $m_2$ . К бруску приложена горизонтальная сила  $F$ .  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.30.** Тонкий брусок скользит по горизонтальной поверхности и приводит в движение цилиндр. Масса шатуна  $AB$  равна  $m_1$ , масса цилиндра радиусом  $R$  —  $m_2$ . К оси цилиндра приложена горизонтальная сила  $F$ .  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.31.** Цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_1$  катается по вертикальной поверхности звена  $AB$  шарнирного параллелограмма и боковой грани бруска массой  $m_2$ . К бруску приложена сила  $F$ , к звену  $BC$  — момент  $M$ .  $AO = BC = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.32.** Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$  катается по вертикальной поверхности звена  $AB$  массой  $m_2$  шарнирного параллелограмма и боковой грани бруска. К бруску приложена сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ .  $AO = BC = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

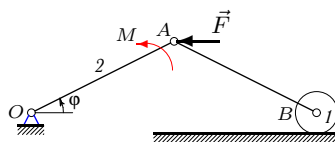
**1.33.** К стержню  $OA$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.34.** К стержню  $AB$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

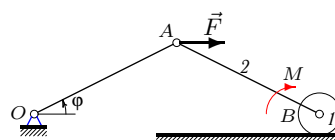
**1.35.** К стержню  $OA$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — вертикальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.36.** К стержню  $AB$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — вертикальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , бруска —  $m_2$ ;  $AO = AB = 2a$ ,  $AC = CD = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

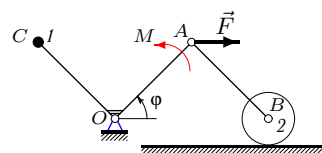
**1.37.** К стержню  $OA$  шарнирного механизма приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  – горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , стержня  $OA$  –  $m_2$ ;  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



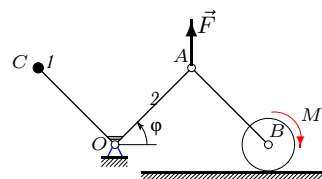
**1.38.** Механизм состоит из двух шарнирного соединенных стержней и цилиндра, катающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости. К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  – горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра  $m_1$ , стержня  $AB$  –  $m_2$ ;  $AO = AB = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота невесомого стержня  $OA$ .  $\varphi$ .

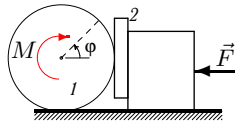
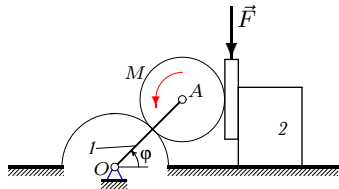
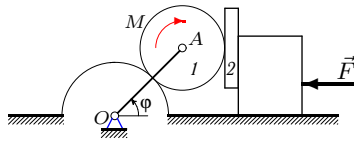
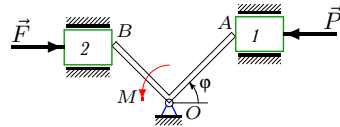
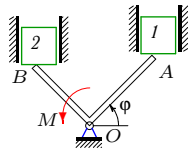


**1.39.** Стержни  $OC$  и  $OA$  жестко скреплены под углом  $90^\circ$ . В точке  $C$  расположена масса  $m_1$ , на оси  $B$  – однородный цилиндр. Масса цилиндра, катающегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости –  $m_2$ . К стержню  $OA$  приложен момент  $M$ . На шарнир  $A$  действует горизонтальная сила  $F$ . Длины стержней равны:  $OA = OC = AB = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  стержней  $OC$  и  $OA$ .



**1.40.** Стержни  $OC$  и  $OA$  жестко скреплены под углом  $90^\circ$ . На конце стержня расположена точка  $C$  массой  $m_1$ . Масса стержня  $OA$  равна  $m_2$ . К цилиндру радиусом  $R$  приложен момент  $M$ . На шарнир  $A$  действует вертикальная сила  $F$ . Длины стержней равны:  $OA = OC = AB = a$ . За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  стержней  $OC$  и  $OA$ .





**1.41.** Стержни  $OB$  и  $OA$ , скрепленные под углом  $90^\circ$ , образуют жесткий уголок, вращающийся вокруг шарнира  $O$ . Бруски массой  $m_1$  и  $m_2$  движутся в вертикальных направляющих. Концы стержней  $A$  и  $B$  скользят без сопротивления по граням брусков и приводят их в движение;  $OA = a$ ,  $OB = b$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

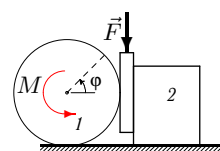
**1.42.** Стержни  $OB$  и  $OA$  жестко скреплены под углом  $90^\circ$ . Бруски массой  $m_1$  и  $m_2$  движутся в горизонтальных направляющих. Концы стержней  $A$  и  $B$  скользят по граням брусков и приводят их в движение;  $OA = a$ ,  $OB = b$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.43.** Цилиндр радиусом  $r$  массой  $m_1$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском массой  $m_2$ , скользящим по грани подвижного блока. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

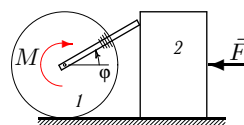
**1.44.** Цилиндр радиусом  $r$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском, скользящим по грани подвижного блока массой  $m_2$ . Масса стержня  $m_1$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.45.** Цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности и находится в зацеплении с тонкой пластиной массой  $m_2$ . Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

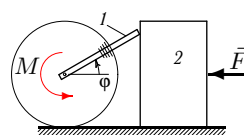
**1.46.** Цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности и находится в зацеплении с тонкой пластиной. Другой гранью пластина скользит без сопротивления по вертикальной грани бруска массой  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .



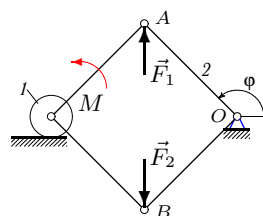
**1.47.** Цилиндр радиусом  $r$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности. Стержень длиной  $a$  жестко соединен с цилиндром и скользит по боковой грани подвижного блока массой  $m_2$ . К блоку приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .



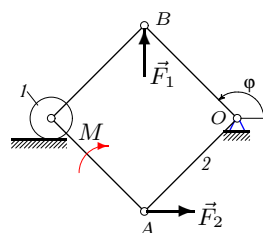
**1.48.** Цилиндр радиусом  $r$  катится по горизонтальной поверхности. Стержень длиной  $a$  массой  $m_1$  жестко соединен с цилиндром и скользит по грани подвижного блока массой  $m_2$ . К блоку приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

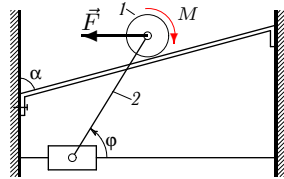
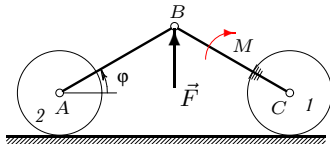
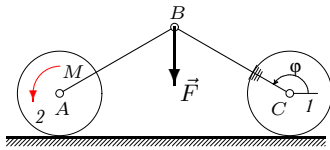
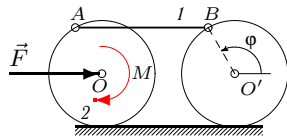
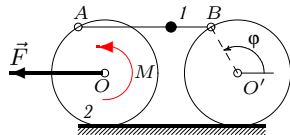


**1.49.** Шарнирный параллелограмм, состоящий из стержней одинаковой длины  $a$ , приводит в движение цилиндр массой  $m_1$ , катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Стержень  $OA$  имеет массу  $m_2$ , остальные стержни считать невесомыми. К шарнирам приложены вертикальные силы  $F_1 = F_2 = F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.50.** Шарнирный параллелограмм, состоящий из стержней одинаковой длины  $a$ , приводит в движение цилиндр массой  $m_1$ , катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Стержень  $OA$  имеет массу  $m_2$ , остальные стержни считать невесомыми. К шарниру  $A$  приложена горизонтальная сила, к шарниру  $B$  — вертикальная;  $F_1 = F_2 = F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.51.** Два диска шарнирно соединены невесомым стержнем  $AB$ , на котором расположена точка массой  $m_1$ . К диску массой  $m_2$  приложен момент  $M$  и горизонтальная сила  $F$ . Второй диск считать невесомым;  $AB \parallel OO'$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

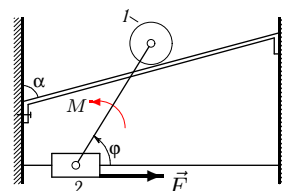
**1.52.** Два диска шарнирно соединены стержнем  $AB$  массой  $m_1$ . К диску массой  $m_2$  приложен момент  $M$  и горизонтальная сила  $F$ . Второй диск считать невесомым;  $AB \parallel OO'$ . Диски катятся по горизонтальной плоскости без проскальзывания. За обобщенную координату принять угол поворота невесомого диска  $\varphi$ .

**1.53.** Два диска массой  $m_1$  и  $m_2$  радиусом  $R$  шарнирно соединены невесомыми стержнями  $AB = BC = a$ . Стержень  $BC$  жестко скреплен с диском 1. Момент  $M$  приложен к диску 2, вертикальная сила  $F$  — к шарниру  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

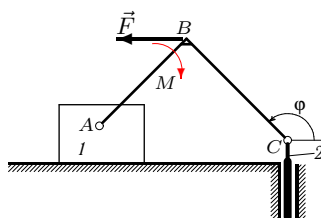
**1.54.** Два диска массой  $m_1$  и  $m_2$  радиусом  $R$  шарнирно соединены невесомыми стержнями  $AB = BC = a$ . Стержень  $BC$  жестко скреплен с диском 1. Момент  $M$  приложен к стержню  $BC$ , вертикальная сила  $F$  — к шарниру  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.55.** Диск массой  $m_1$  радиусом  $R$  катится по наклонной балке. Стержень длиной  $L$  соединяет муфту, скользящую по горизонтальной направляющей, с осью диска. Момент  $M$  приложен к диску, сила  $F$  — к оси диска. Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

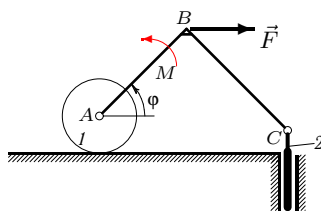
**1.56.** Диск массой  $m_1$  радиусом  $R$  катится по наклонной балке. Невесомый стержень длиной  $L$  соединяет муфту, скользящую по горизонтальной направляющей, с осью диска. Момент  $M$  приложен к стержню, сила  $F$  — к муфте. Масса муфты  $m_2$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



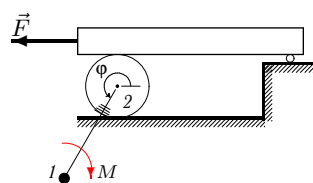
**1.57.** Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет груз массой  $m_1$  и поршень массой  $m_2$ , движущийся в вертикальных направляющих.  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Момент  $M$  приложен к стержню, горизонтальная сила  $F$  — к углу  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



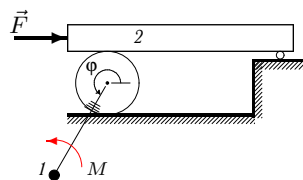
**1.58.\*** Невесомый изогнутый под прямым углом стержень соединяет цилиндр массой  $m_1$  и поршень массой  $m_2$ , движущийся в вертикальных направляющих.  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Момент  $M$  приложен к стержню, горизонтальная сила  $F$  — к углу  $B$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

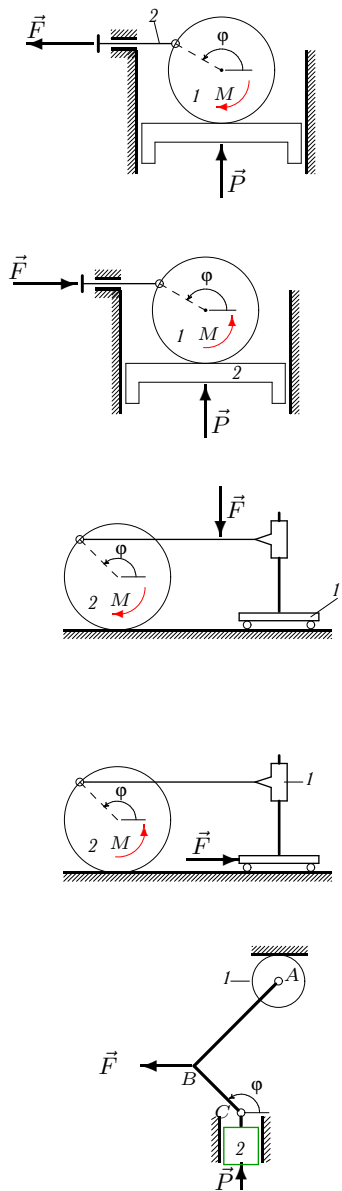


**1.59.** Стержень длиной  $L$  с точкой массой  $m_1$  на конце жестко соединен с диском радиусом  $R$ . Масса диска  $m_2$ . На диск положен без проскальзывания горизонтальный брусок, опирающийся одним концом на подшипник. Момент  $M$  приложен к стержню. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



**1.60.** Стержень длиной  $L$  с точкой массой  $m_1$  на конце жестко соединен с диском радиусом  $R$ . На диск положен без проскальзывания горизонтальный брусок массой  $m_2$ , опирающийся одним концом на подшипник. Момент  $M$  приложен к стержню. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .





**1.61.** Цилиндр массой  $m_1$  радиусом  $R$  находится на поверхности поршня. Шток массой  $m_2$ , движущийся в горизонтальных направляющих, шарнирно прикреплен к ободу цилиндра. Момент  $M$  приложен к цилиндру, сила  $P$  — к поршню,  $F$  — к штоку. За обобщенную координату принять  $\phi$ .

**1.62.** Цилиндр массой  $m_1$  радиусом  $R$  находится на поверхности поршня массой  $m_2$ . Шток, движущийся в горизонтальных направляющих, шарнирно прикреплен к ободу цилиндра. Момент  $M$  приложен к цилиндру, сила  $P$  — к поршню,  $F$  — к штоку. За обобщенную координату принять  $\phi$ .

**1.63.** К муфте, движущейся по вертикальной стойке, закрепленной на тележке массой  $m_1$ , жестко прикреплена горизонтальная тяга, шарнирно соединенная с ободом диска. Масса диска  $m_2$ , радиус  $R$ . Момент  $M$  приложен к диску, сила  $F$  — к тяге. За обобщенную координату принять  $\phi$ .

**1.64.** К муфте массой  $m_1$ , движущейся по вертикальной стойке, закрепленной на тележке, жестко прикреплена горизонтальная тяга, шарнирно соединенная с ободом диска. Масса диска  $m_2$ , радиус  $R$ . Момент  $M$  приложен к диску, сила  $F$  — к тележке. За обобщенную координату принять  $\phi$ .

**1.65.** Невесомый крюк  $ABC$ , изогнутый под прямым углом, шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к углу  $B$ , сила  $P$  — к поршню;  $AB = a$ ,  $BC = b$ . За обобщенную координату принять  $\phi$ .

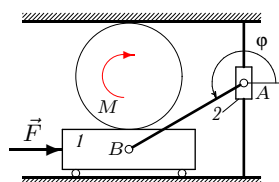
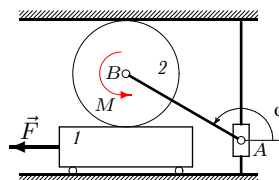
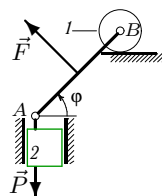
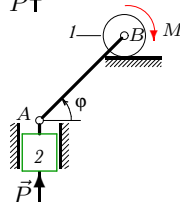
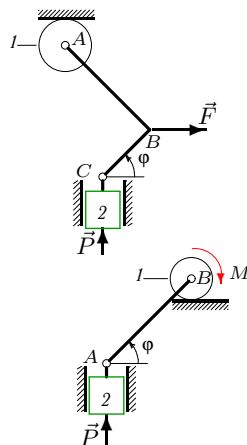
**1.66.** Невесомый крюк  $ABC$ , изогнутый под прямым углом, шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к углу  $B$ , сила  $P$  — к поршню;  $AB = b$ ,  $BC = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

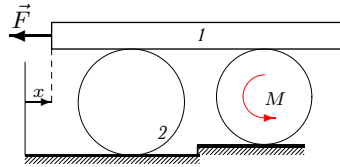
**1.67.** Невесомый стержень  $AB$  длиной  $a$  шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Момент  $M$  приложен к диску, сила  $P$  — к поршню. Радиус диска  $R$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.68.** Невесомый стержень  $AB$  длиной  $a$  шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к середине стержня под прямым углом, сила  $P$  — к поршню. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

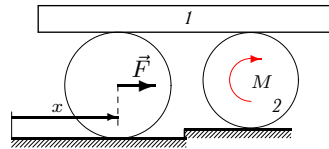
**1.69.** По вертикальной направляющей движется муфта  $A$ , шарнирно соединенная с диском радиусом  $R$ . Верхней точкой обода диск касается горизонтальной поверхности, нижней — бруска массой  $m_1$  на невесомых подшипниках. Масса диска  $m_2$ .  $AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.70.** По вертикальной направляющей движется муфта  $A$ , шарнирно соединенная с бруском. Верхней точкой обода диск касается горизонтальной поверхности, нижней — бруска массой  $m_1$  на невесомых подшипниках. Масса муфты  $m_2$ .  $AB = a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

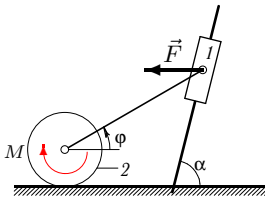




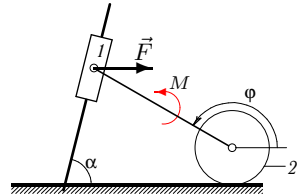
**1.71.\*** Брусок массой  $m_1$  горизонтально лежит на двух цилиндрах. К цилиндру радиуса  $r$  приложен момент  $M$ , к бруску — сила  $F$ . Масса цилиндра большего радиуса равна  $m_2$ . Проскальзывание во всех точках контакта отсутствует. За обобщенную координату принять  $x$ .



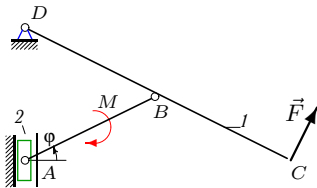
**1.72.** Брусок массой  $m_1$  горизонтально лежит на двух цилиндрах радиусов  $R$  и  $r$ . К одному цилиндру массой  $m_2$  приложен момент  $M$ , к оси другого — сила  $F$ . Проскальзывание во всех точках контакта отсутствует. За обобщенную координату принять перемещение центра цилиндра  $x$ .



**1.73.** Муфта массой  $m_1$ , скользящая по направляющей, наклоненной под углом  $\alpha$ , шарнирно соединена невесомым стержнем с диском массой  $m_2$  радиусом  $R$ . К диску приложен момент  $M$ , к муфте — горизонтальная сила  $F$ . Длина стержня  $a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

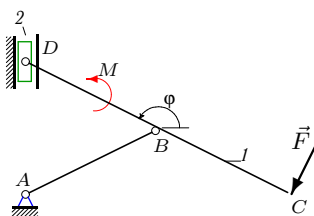


**1.74.\*** Муфта массой  $m_1$ , скользящая по направляющей, наклоненной под углом  $\alpha$ , шарнирно соединена невесомым стержнем с диском массой  $m_2$  радиусом  $R$ . К стержню приложен момент  $M$ , к муфте — горизонтальная сила  $F$ . Длина стержня  $a$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

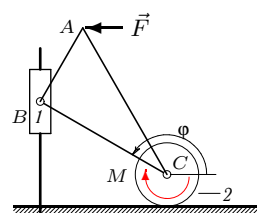


**1.75.** Стержень  $CD$  массой  $m_1$  и стержень  $AB$  шарнирно соединены.  $AB = BC = BD = a$ . Масса ползуна, скользящего по вертикальной плоскости, равна  $m_2$ . К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ ; сила  $F$  перпендикулярна  $CD$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

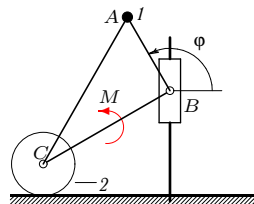
**1.76.** Стержень  $CD$  массой  $m_1$  и стержень  $AB$  шарнирно соединены.  $AB = BC = BD = a$ . Масса ползуна, скользящего по вертикальной плоскости, равна  $m_2$ . К стержню  $CD$  приложен момент  $M$ ; сила  $F$  перпендикулярна  $CD$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



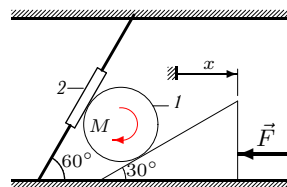
**1.77.** Треугольная пластина шарнирно прикреплена к муфте, скользящей по вертикальной направляющей, и диску радиусом  $R$ . Масса ползуна  $m_1$ , диска —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ .  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AB \perp BC$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



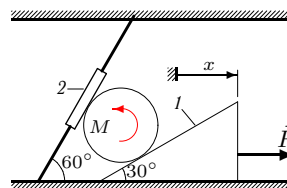
**1.78.** Треугольная пластина шарнирно прикреплена к муфте, скользящей по вертикальной направляющей, и диску радиусом  $R$ . Масса точки на вершине  $A$  равна  $m_1$ , масса диска —  $m_2$ . К пластине приложен момент  $M$ .  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AB \perp BC$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

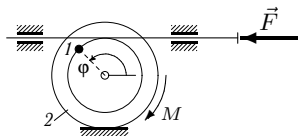
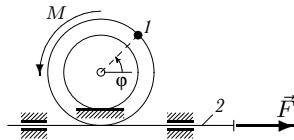
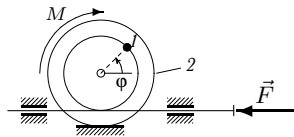
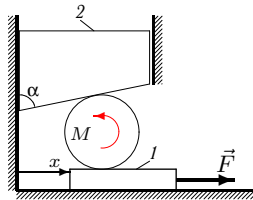
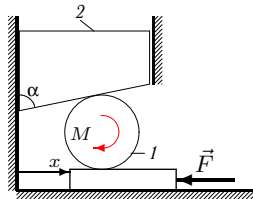


**1.79.** Цилиндр радиусом  $R$  зажат между муфтой, надетой на наклонный стержень, и призмой, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса цилиндра равна  $m_1$ , муфты —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение призмы  $x$ .



**1.80.** Цилиндр радиусом  $R$  зажат между муфтой, надетой на наклонный стержень, и призмой, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса призмы равна  $m_1$ , муфты —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение призмы  $x$ .





**1.81.** Цилиндр радиусом  $R$  прижимается скошенным прессом (призмой) к пластине, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса цилиндра  $m_1$ , призмы —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение пластины  $x$ .

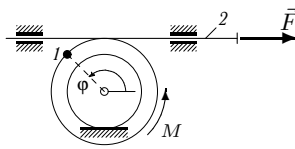
**1.82.** Цилиндр радиусом  $R$  прижимается скошенным прессом (призмой) к пластине, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса пластины равна  $m_1$ , призмы —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение пластины  $x$ .

**1.83.** Внешним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внутренним — касается подвижного штока. На внутреннем ободе блока расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса блока равна  $m_2$ , радиус инерции  $\rho$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

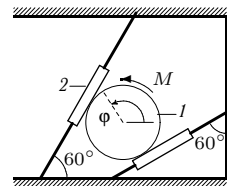
**1.84.** Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается штока, скользящего в горизонтальных направляющих. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса штока  $m_2$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**1.85.\*** Внешним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внутренним — касается подвижного штока. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса блока равна  $m_2$ , радиус инерции  $\rho$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

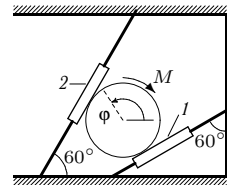
**1.86.** Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается подвижного штока. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса штока  $m_2$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



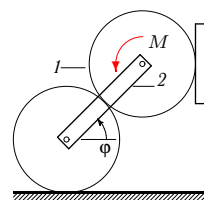
**1.87.** Цилиндр радиусом  $R$  приводит в движение муфты, надетые на наклонные стержни. Масса цилиндра  $m_1$ , масса верхней муфты  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .



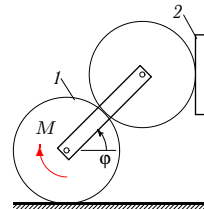
**1.88.** Цилиндр радиусом  $R$  приводит в движение муфты, надетые на наклонные жестко закрепленные стержни. Массы муфт  $m_1$  и  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ . Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

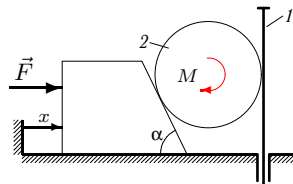
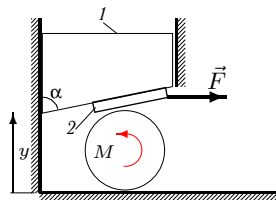
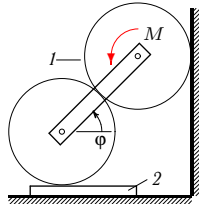
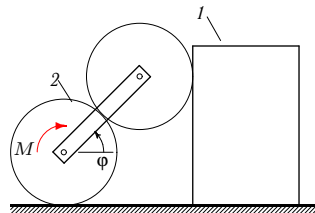
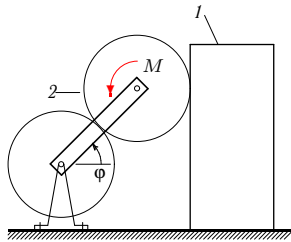


**1.89.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по пластинке, скользящей по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по горизонтальной поверхности. К верхнему цилиндру массой  $m_1$  приложен момент  $M$ , масса спарника  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .



**1.90.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится по пластинке, скользящей по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр массой  $m_1$  находится в зацеплении с верхним. К нижнему цилиндру приложен момент  $M$ . Масса пластинки  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .





**1.91.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по боковой грани параллелепипеда массой  $m_1$ , скользящего по горизонтальной плоскости. Нижний цилиндр, вращающийся на неподвижной оси, находится в зацеплении с верхним. К верхнему цилиндру массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

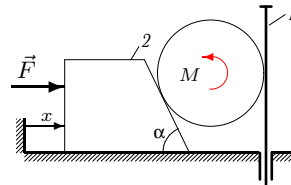
**1.92.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр катится по боковой грани параллелепипеда массой  $m_1$ , скользящего по горизонтальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним. К нижнему цилиндру массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

**1.93.** Оси цилиндров радиусом  $R$  соединены спарником. Верхний цилиндр массой  $m_1$  катится по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой  $m_2$ , скользящей по горизонтальной плоскости. За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

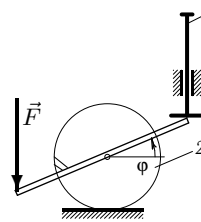
**1.94.** Между цилиндром радиусом  $R$  и скошенным прессом (призмой) массой  $m_1$  зажата пластина массой  $m_2$ , скользящая по гладкой поверхности пресса. К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение пресса  $y$ .

**1.95.** Цилиндр радиусом  $R$  касается вертикального штока массой  $m_1$  и призмы, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса цилиндра  $m_2$ . К призме приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять смещение призмы  $x$ .

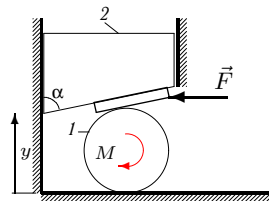
**1.96.\*** Цилиндр радиусом  $R$  касается вертикального штока массой  $m_1$  и призмы, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса призмы  $m_2$ . К призме приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . За обобщенную координату принять смещение призмы  $x$ .



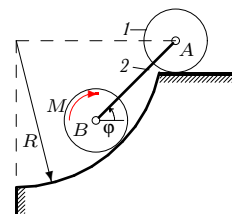
**1.97.** Шток массой  $m_1$  движется в вертикальных направляющих. Стержень длиной  $2a$ , жестко закрепленный в центре с осью цилиндра массой  $m_2$  радиусом  $R$ , скользит одним концом по нижней поверхности штока. К другому концу стержня приложена вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .



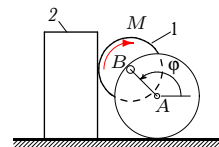
**1.98.** Между цилиндром радиусом  $R$  и скошенным прессом (призмой) зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности пресса. Масса цилиндра  $m_1$ , призмы —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять перемещение пресса  $y$ .

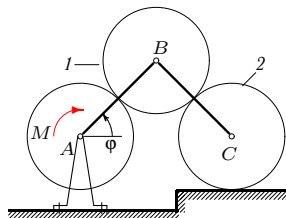
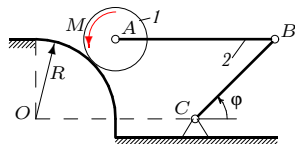
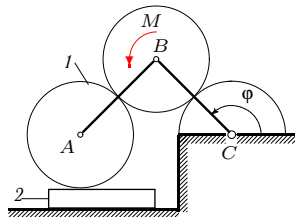
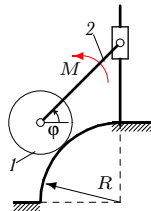
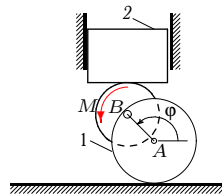


**1.99.** Оси двух дисков радиусами  $r$  соединены стержнем длиной  $4r$ . Диск  $A$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 5r$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ , массой диска  $B$  пренебречь. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



**1.100.** На ободе диска  $A$  радиусом  $R$  шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$  массой  $m_1$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по боковой поверхности груза массой  $m_2$ , скользящего по горизонтальной поверхности. К диску  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота диска  $A$ .





**1.101.** На ободе диска  $A$  радиусом  $R$  массой  $m_1$  шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по нижней поверхности вертикально перемещающегося поршня массой  $m_2$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота диска  $A$ .

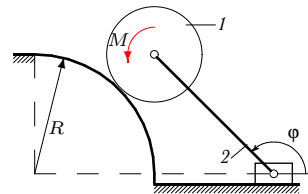
**1.102.** Ось диска массой  $m_1$  радиусом  $r$  соединена стержнем длиной  $3r$  с муфтой, скользящей по вертикальной направляющей. Диск катится по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К стержню массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**1.103.** Оси цилиндров  $A$  и  $B$  радиусами  $R$ , находящиеся в зацеплении, шарнирно соединены невесомым звеном  $AB$ . Цилиндр  $B$  катится по неподвижному цилиндру радиусом  $R$ , цилиндр  $A$  массой  $m_1$  опирается на пластину массой  $m_2$ , скользящую по горизонтальной поверхности. К цилиндру  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота стержня  $CB$ .

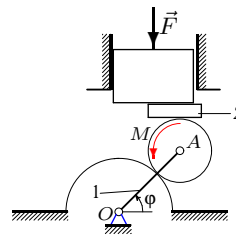
**1.104.** Механизм состоит из диска массой  $m_1$  радиусом  $r$ , стержня  $AB$  массой  $m_2$  и кривошипа  $CB$  длиной  $3r$ . Диск катится по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ ,  $AB = OC$ . К диску приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**1.105.** Оси цилиндров  $A$ ,  $B$  и  $C$  радиусом  $R$ , находящиеся в зацеплении, соединены шарнирным двухзвенником  $ABC$ . Цилиндр  $B$  имеет массу  $m_1$ . Ось цилиндра  $A$  неподвижна. К цилиндру  $A$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота стержня  $AB$ .

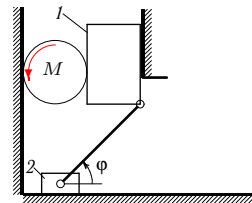
**1.106.** Диск массой  $m_1$  и радиусом  $r$  соединен с ползуном стержнем длиной  $3r$ . Диск катится по неподвижной цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



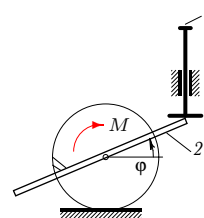
**1.107.** Диск радиусом  $r$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском массой  $m_2$ , скользящим по нижней грани прессы, движущегося вертикально. Оси цилиндров соединены стержнем массой  $m_1$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



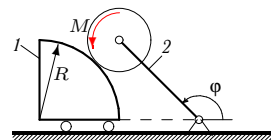
**1.108.** Диск радиусом  $r$  и прямоугольный блок массой  $m_1$  движутся между вертикальными плоскостями. Горизонтально скользящий ползун массой  $m_2$  соединен с блоком невесомым стержнем длиной  $L$ . К диску приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

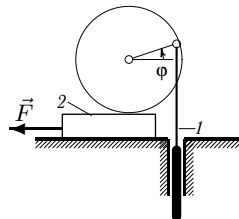
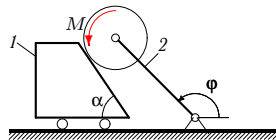
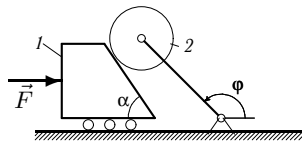
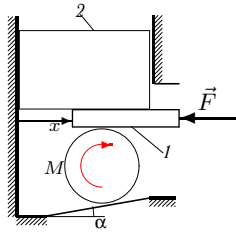
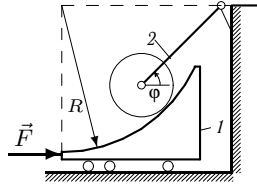


**1.109** Шток массой  $m_1$  свободно движется в вертикальных направляющих. Стержень массой  $m_2$  длиной  $2a$ , жестко скрепленный с цилиндром, скользит одним концом по нижней поверхности штока. К цилиндру радиусом  $R$  приложен момент  $M$ . Центр стержня соединен с центром цилиндра. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .



**1.110.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 3r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $4r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .





**1.111.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 4r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $3r$  массой  $m_2$ . К грузу приложена сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**1.112.** Между диском радиусом  $R$  и прессом зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности прессы. Диск катится по наклонной ( $\alpha$ ) поверхности. Масса пластины равна  $m_1$ , прессы —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять горизонтальное перемещение пластины  $x$ .

**1.113.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой поверхности груза катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $5r$ . К грузу приложена сила  $F$ . Масса диска  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**1.114.** Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой поверхности груза катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $4r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**1.115.** Вертикально движущийся поршень массой  $m_1$  закреплен шарнирно на ободе диска радиусом  $R$ . Диск без проскальзывания катится по пластине, лежащей на гладкой плоскости. К пластине приложена сила  $F$ . Масса пластины  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

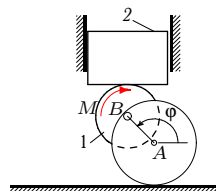
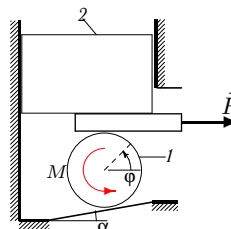
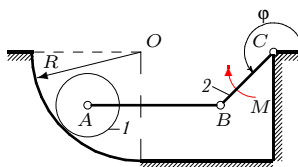
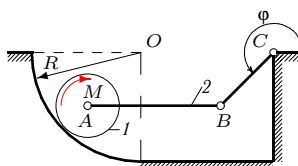
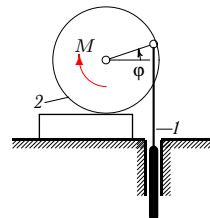
**1.116.** Вертикально движущийся поршень массой  $m_1$  закреплен шарнирно на ободе диска радиусом  $R$ . Диск массой  $m_2$  без проскальзывания катится по пластине, лежащей на гладкой плоскости. К диску приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

**1.117.** Диск радиусом  $r$  массой  $m_1$  катится по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом  $R = 4r$ . Длина кривошипа  $BC$  равна  $3r$ . К диску приложен внешний момент  $M$ . Масса стержня  $AB$  равна  $m_2$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота стержня  $BC$ .

**1.118.** Диск радиусом  $r$  массой  $m_1$ , шарнирно закрепленный на конце невесомого стержня  $AB$ , катится без проскальзывания по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом  $R = 4r$ . К стержню  $BC$  длиной  $3r$  и массой  $m_2$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**1.119.** Между диском радиусом  $R$  и прессом зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности прессы. Пресс движется в вертикальных направляющих. Диск катится по поверхности, составляющей с горизонтом угол  $\alpha$ . Масса диска  $m_1$ , прессы —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

**1.120.** На ободе диска  $A$  радиусом  $R$  шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$  массой  $m_1$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по нижней поверхности вертикально перемещающегося поршня массой  $m_2$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ . За обобщенную координату принять угол  $\varphi$  поворота диска  $A$ .



## Примеры решений

### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Определение кинематических зависимостей. Выражение скоростей (угловых скоростей) через обобщенную скорость и обобщенную координату.

2. Нахождение кинетической энергии системы.

3. Определение обобщенной силы.

4. Составление уравнения.

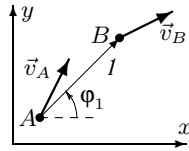
Разберем отдельно каждый пункт плана.

#### 1. Определение кинематических зависимостей

Скорость точки  $B$  тела при плоском движении вычисляют через известную скорость какой-либо точки  $A$  того же тела, принимаемой за полюс (рис. 1):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \times \vec{AB}. \quad (\text{I.1})$$

Для расчета скоростей точек механизма формулу (I.1) применяют последовательно для всех точек, переходя от одной точки, принимаемой за полюс, к другой. Схему вычислений в этом случае удобно записывать в виде структурных формул (графов [8], [6])



$$A \xrightarrow[\varphi_1]{1} B, \quad (\text{I.2})$$

Рис. 1 где над стрелкой указан номер тела или наименование стержня, которому принадлежат точки, а снизу — угол  $\varphi$  между осью  $x$  и вектором  $\vec{AB}$ . В проекциях на оси  $x, y$  граф (I.3) дает уравнения

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - AB \omega_{1z} \sin \varphi_1, \\ v_{By} &= v_{Ay} + AB \omega_{1z} \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

где  $\omega_{1z}$  — проекция угловой скорости тела  $1$  на ось  $z$ , перпендикулярную плоскости движения.

В качестве вершин графа удобно брать точки механизма с заданными или искомыми скоростями. При этом скорость может быть задана частично, например, только по направлению. Если в задаче имеется тело (обычно диск или цилиндр), катящееся без проскальзывания по

какой-либо поверхности, то точка касания тела может быть вершиной графа, так как скорость ее равна нулю.

Метод кинематических графов удобен и прост в решении. Однако следует предупредить о характерной ошибке, встречающейся при составлении графов. Так, при рассмотрении графа для рис. 1 "в обратном направлении"  $B \xrightarrow{\pi + \Phi_1} A$ , можно ошибиться при выборе угла. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Bx} - AB \omega_{1z} \sin(\pi + \Phi_1), \\ v_{Ay} &= v_{By} + AB \omega_{1z} \cos(\pi + \Phi_1). \end{aligned} \quad (I.4)$$

Уравнения (I.3) и (I.4) совпадают.

В некоторых очевидных случаях метод кинематических графов применять нецелесообразно. Например, при определении скорости точки  $A$  цилиндра, катящегося по неподвижной поверхности, по заданной скорости центра  $O$  (рис. 2) проще использовать понятие мгновенного центра скоростей (МЦС). Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка  $P$  касания плоскости неподвижна. Следовательно, учитывая линейное распределение скоростей, получаем  $v_{Ax} = v_{Ox}/2$ . В общем же случае метод МЦС связывает модули угловых скоростей, поэтому для решения задачи он непригоден, так как при вычислении обобщенной силы необходимы проекции скоростей.

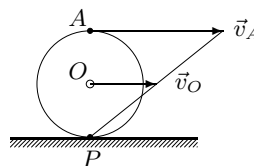


Рис. 2

Для определения проекций скоростей можно также воспользоваться координатным методом. Рассмотрим кривошипно-шатунный механизм (рис. 3). Кривошип  $AB$ , вращаясь вокруг оси в подшипнике  $A$ , посредством шатуна  $BC$  сообщает возвратно-поступательное движение ползуну  $C$ . Дано:  $AB = BC = l$ . Силы, действующие на механизм, не указаны, для кинематического анализа они не требуются.

Пусть  $\varphi$  — обобщенная координата. Найдём скорость ползуна. Для этого определим его координату

$$x_C = x_A + 2l \cos \varphi.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$v_{xC} = -2l\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (I.5)$$

Легко проверить, что этот же результат получается методом графов.

Строим граф  $A \xrightarrow{\dot{\varphi}} B \xrightarrow{-\dot{\varphi}} C$ . Записываем оба уравнения графа в проекции и на оси  $x$  и  $y$ . Вычислив из второго уравнения графа (в проекции на  $y$ )

$$v_{Cy} = v_{Ay} + l\dot{\varphi} \cos \varphi + l\omega_{BCz} \cos(-\varphi)$$

угловую скорость  $\omega_{BCz} = -\dot{\varphi}$  и подставив ее в первое уравнение

$$v_{Cx} = v_{Ax} - l\dot{\varphi} \sin \varphi - l\omega_{BCz} \sin(-\varphi),$$

получаем тот же результат (I.5), но более сложным способом.

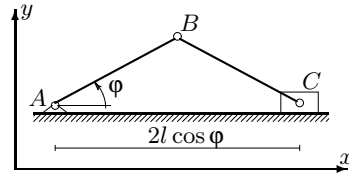


Рис. 3

## 2. Нахождение кинетической энергии системы

Для получения кинетической энергии системы следует помнить несколько основных вариантов:

а) поступательное движение тела массой  $m$  со скоростью  $v$  или движение точки

$$T = \frac{mv^2}{2};$$

б) вращательное движение тела с моментом инерции  $J$  относительно оси вращения с угловой скоростью  $\omega$

$$T = \frac{J\omega^2}{2};$$

в) плоское движение тела с массой  $m$

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

где  $v_c$  — скорость центра масс тела,  $\omega$  — угловая скорость,  $J_c$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

г) качение однородного цилиндра по поверхности (см. рис. 2)

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2(v_c/R)^2}{4} = \frac{3mv_c^2}{4}. \quad (\text{I.6})$$

Напомним также выражение момента инерции стержня длиной  $AB = l$  и массой  $m$  (рис. 4) относительно середины <sup>1)</sup>

$$J_O = \frac{ml^2}{12}$$

и относительно конца  $J_A = ml^2/3$ . Если известен радиус инерции тела  $\rho$  (обычно блока колес), то момент инерции вычисляется по формуле  $J = m\rho^2$ .

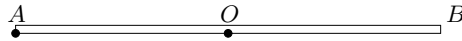


Рис. 4

### 3. Определение обобщенной силы

Обобщенная сила находится с использованием скалярного произведения при вычислении мощности. Пусть, например,  $\phi$  — обобщенная координата. Тогда

$$Q = \frac{1}{\phi} (\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k + \vec{M}_1 \cdot \vec{\omega}_1 + \vec{M}_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{M}_n \cdot \vec{\omega}_n),$$

где  $\vec{F}_i$ ,  $i = 1..k$  и  $\vec{M}_j$ ,  $j = 1..n$  — действующие на систему силы и моменты;  $\vec{v}_i$  — скорости точек приложения сил,  $\vec{\omega}_j$  — угловые скорости тел, к которым приложены моменты.

### 4. Составление уравнения

При заданных выражениях для кинетической энергии и обобщенной силы составление уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q$$

<sup>1)</sup> Когда говорится, что момент инерции вычисляется относительно середины, то подразумевается момент инерции относительно оси, проходящей через середину стержня.

сводится к дифференцированию кинетической энергии по обобщенной координате и обобщенной скорости. Эта процедура в основном одинаковая для всех задач. Например, если кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\phi}^2}{2} (A + B \sin^2 \phi + C \sin 2\phi),$$

то частные производные легко вычисляются:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(A + B \sin^2 \phi + C \sin 2\phi), \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{2}(B \sin 2\phi + 2C \cos 2\phi).$$

Полная производная по времени определяется по формуле

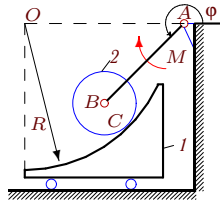
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{\phi}(A + B \sin^2 \phi + C \sin 2\phi) + \dot{\phi}^2(B \sin 2\phi + 2C \cos 2\phi).$$

Окончательно уравнение примет вид

$$\ddot{\phi}(A + B \sin^2 \phi + C \sin 2\phi) + (1/2)\dot{\phi}^2(B \sin 2\phi + 2C \cos 2\phi) = Q.$$

Приведем краткие решения некоторых задач.

### Задача 1



Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 3r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне  $AB$  длиной  $2r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\phi$ .

### Решение

Заметим, что по условию задачи треугольник  $OBA$  равнобедренный. Отсюда угол между  $BC$  и осью  $x$  (горизонтальная ось направо) равен  $\pi - \phi$ . Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow[\phi]{AB} B \xrightarrow[\pi-\phi]{r} C$ , где  $C$  – точка касания диска и груза. Соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - AB\dot{\phi} \sin \phi - r\omega_z \sin(\pi - \phi), \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + AB\dot{\phi} \cos \phi + r\omega_z \cos(\pi - \phi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$  и  $v_{Cy} = 0$ , получаем угловую скорость диска и скорость груза:  $\omega_z = 2\dot{\phi}$ ,  $v_{Cx} = -4r\dot{\phi} \sin \phi$ .

Вычислим кинетическую энергию груза, совершающего поступательное движение

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Cx}^2}{2} = 8m_1 \dot{\phi}^2 r^2 \sin^2 \phi.$$

Из графа  $A \xrightarrow[\phi]{AB} B$  сразу же следует

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -AB\dot{\phi} \sin \phi, \\ v_{By} &= AB\dot{\phi} \cos \phi, \end{aligned}$$

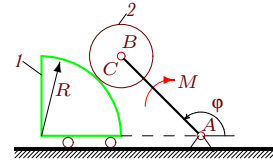
и  $v_B = 4r\dot{\phi}$ . Кинетическая энергия плоского движения диска примет вид

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_z^2}{2} = 8m_2 \dot{\phi}^2 r^2 + m_2 \dot{\phi}^2 r^2.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид  $T = \frac{\dot{\phi}^2}{2} (A + B \sin^2 \phi)$ .  
Обобщенная сила  $Q = \frac{1}{\dot{\phi}} (-M\dot{\phi} + (-m_2 g) v_{By}) = -M - 4m_2 r g \cos \phi$ .

### Задача 2

Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = = 3r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне  $AB$  длиной  $4r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\phi$ .



### Решение

Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow[\phi]{AB} B \xrightarrow[2\pi-\phi]{r} C$ , где  $C$  – точка касания диска и груза. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - AB\dot{\phi} \sin \phi - r\omega_z \sin(2\pi - \phi), \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + AB\dot{\phi} \cos \phi + r\omega_z \cos(2\pi - \phi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$  и  $v_{Cy} = 0$ , выразим угловую скорость диска и скорость груза через обобщенную скорость и обобщенную координату

$$\omega_z = -4\dot{\phi}, \quad v_{Cx} = -8r\dot{\phi} \sin \phi.$$

Вычислим кинетическую энергию груза, совершающего поступательное движение со скоростью  $v_{Cx}$

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Cx}^2}{2} = 32m_1 \dot{\phi}^2 r^2 \sin^2 \phi.$$

Из графа  $A \xrightarrow{\frac{AB}{\phi}} B$  сразу же следует

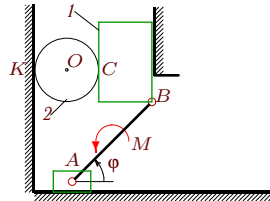
$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -AB\dot{\phi} \sin \phi, \\ v_{By} &= AB\dot{\phi} \cos \phi \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 16r^2 \dot{\phi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, имеющего момент инерции относительно центральной оси  $J_2 = = m_2 r^2 / 2$ , состоит из двух слагаемых

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_z^2}{2} = 8m_2 \dot{\phi}^2 r^2 + 4m_2 \dot{\phi}^2 r^2.$$

Суммарная кинетическая энергия всей системы как функция обобщенной скорости  $\dot{\phi}$  имеет вид  $T = \frac{\dot{\phi}^2}{2} (A + B \sin^2 \phi)$ . В выражение обобщенной силы войдет сила тяжести диска и внешний момент  $Q = = \frac{1}{\dot{\phi}} ((-M)\dot{\phi} + (-m_2 g)v_{By}) = -M - 4m_2 r g \cos \phi$ . Вертикальная сила тяжести груза  $I$  на горизонтальной скорости не имеет мощности.

### Задача 3



Диск радиусом  $r$  и прямоугольный груз массой  $m_1$  движутся между вертикальными плоскостями. Горизонтально скользящий ползун соединен с грузом стержнем длиной  $L$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\phi$ .

### Решение

Для вычисления кинетической энергии потребуются выражения скорости центра диска, его угловой скорости и скорости груза через обобщенную скорость  $\dot{\phi}$ . Рассмотрим сначала кинематический граф  $A \xrightarrow{\frac{L}{\phi}} B$ . Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} - L\dot{\phi} \sin \phi, \\ v_{By} &= v_{Ay} + L\dot{\phi} \cos \phi. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ay} = v_{Bx} = 0$ , получаем скорость скольжения ползуна и скорость поступательного движения груза

$$v_{Ax} = L\dot{\phi} \sin \phi, \quad v_{By} = L\dot{\phi} \cos \phi.$$

Составим граф  $K \xrightarrow[0]{2r} C$  для определения угловой скорости диска и получим

$$v_{Cy} = v_{Ky} + 2r\omega_z \cos 0.$$

Здесь  $C$  и  $K$  — точки касания диска с грузом и стеной. Ясно, что  $v_{Kx} = v_{Ky} = 0$ ,  $v_C = v_B$ , поэтому  $\omega_z = (L/(2r))\dot{\phi} \cos \phi$ . Далее, из

графа от МЦС диска к его центру  $K \xrightarrow[0]{r} O$  сле-

дует  $v_{Oy} = r\omega_z \cos 0$ , или  $v_{Oy} = (1/2)L\dot{\phi} \cos \phi$ . Заметим, то, что скорость центра  $O$  вдвое меньше скорости точки  $C$  легче получить, используя понятие МЦС. У диска МЦС — точка  $K$ .

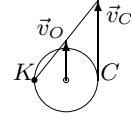


Рис. 5

Вычислим кинетическую энергию груза, совершающего поступательное движение

$$T_1 = \frac{m_1 v_{By}^2}{2} = \frac{m_1}{2} L^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi.$$

Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, согласно (I.6), имеет вид

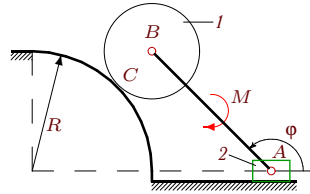
$$T_2 = \frac{3m_2 v_O^2}{4} = \frac{3m_2}{16} L^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\phi}^2}{2} B \cos^2 \phi.$$

Обобщенная сила вычисляется по мощности момента  $M$  и сил тяжести тел 1 и 2:

$$Q = \frac{1}{\dot{\phi}} (M\dot{\phi} + (-m_1 g)v_{By} + (-m_2 g)v_{Oy}) = M - gL \left( m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \cos \phi.$$

**Задача 4**

Диск массой  $m_1$  радиусом  $r$  соединен с ползуном стержнем длиной  $3r$ . Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса ползуна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Решение**

Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow{3r} B \xrightarrow[r]{-\varphi} C$ , где  $C$  – точка касания диска и поверхности. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - 3r\dot{\varphi} \sin \varphi - r\omega_z \sin(-\varphi), \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + 3r\dot{\varphi} \cos \varphi + r\omega_z \cos(-\varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ay} = 0$  и  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$ , получаем угловую скорость диска и скорость ползуна  $\omega_z = -3\dot{\varphi}$ ,  $v_{Ax} = 6r\dot{\varphi} \sin \varphi$ . Из графа  $A \xrightarrow{3r} B$  сразу же следует

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= 3r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= 3r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле (I.6)

$$T_1 = \frac{3m_1 v_B^2}{4} = \frac{27}{4} r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим кинетическую энергию ползуна, совершающего поступательное движение

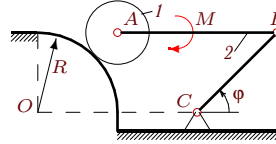
$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ax}^2}{2} = 18m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид  $T = \dot{\varphi}^2/2 (A + B \sin^2 \varphi)$ . Обобщенная сила вычисляется по моменту  $M$  и силе тяжести тела 1:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}((-M)\dot{\varphi} + (-m_1 g)v_{By}) = -M - 3m_1 g r \cos \varphi.$$

**Задача 5**

Механизм состоит из диска массой  $m_1$  и радиусом  $r$ , шарнирно соединенных стержня  $AB$  массой  $m_2$  и кривошипа  $CB$  длиной  $3r$ . Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ ,  $AB = OC$ . К стержню  $AB$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Решение**

По условию задачи  $OA = BC = 3r$ ,  $AB = OC$ , поэтому  $ABCO$  — параллелограмм, следовательно, стержень  $AB$  движется поступательно. При поступательном движении тела скорости всех его точек равны  $v_A = v_B$ , а угловая скорость равна нулю:  $\omega_{2z} = 0$ . Составляем кинематический граф  $C \xrightarrow{3r} B$ , из которого сразу же следует

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -3r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= 3r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_A^2 = v_B^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности,

$$T_1 = \frac{3m_1 v_A^2}{4} = \frac{27}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия поступательного движения стержня  $AB$

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} = \frac{9m_2 r^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид

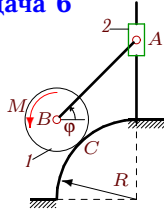
$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} A,$$

где  $A$  — некоторая константа (обобщенный момент инерции механизма). Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} ((-M)\omega_{2z} + (-m_1 g)v_{Ay} + (-m_2 g)v_{Ay}) = -3(m_1 + m_2)gr \cos \varphi.$$

Для  $A = \text{const}$  уравнение Лагранжа имеет простой вид  $A\ddot{\varphi} = Q$  и не отличается от уравнения движения точки.

## Задача 6



Ось диска массой  $m_1$  радиусом  $r$  соединена стержнем длиной  $3r$  с муфтой, скользящей по вертикальной направляющей. Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 2r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса муфты  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

## Решение

Составляем кинематический граф  $A \xrightarrow[\pi+\varphi]{3r} B \xrightarrow[-\varphi]{r} C$ , где  $C$  — точка касания диска и поверхности. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= v_{Ax} - 3r\dot{\varphi} \sin(\pi + \varphi) - r\omega_z \sin(-\varphi), \\ v_{Cy} &= v_{Ay} + 3r\dot{\varphi} \cos(\pi + \varphi) + r\omega_z \cos(-\varphi). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Ax} = 0$  и  $v_{Cx} = v_{Cy} = 0$ , получаем угловую скорость диска и скорость ползуна:  $\omega_z = -3\dot{\varphi}$ ,  $v_{Ay} = 6r\dot{\varphi} \cos \varphi$ .

Из графа  $A \xrightarrow[\pi+\varphi]{3r} B$  сразу же следует

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -3r\dot{\varphi} \sin(\pi + \varphi) = 3r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= v_{Ay} + 3r\dot{\varphi} \cos(\pi + \varphi) = 3r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

и  $v_B^2 = 9r^2\dot{\varphi}^2$ . Кинетическая энергия плоского движения однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле

$$T_1 = \frac{3m_1 v_B^2}{4} = \frac{27}{4} m_1 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим кинетическую энергию ползуна 2, совершающего поступательное движение

$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ay}^2}{2} = 18r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi.$$

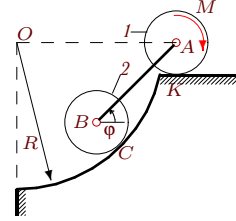
Суммарная кинетическая энергия имеет вид  $T = \dot{\varphi}^2 / 2 (A + B \cos^2 \varphi)$ .

Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\varphi} (M\omega_z + (-m_1 g)v_{By} + (-m_2 g)v_{Ay}) = -3M - gr \cos \varphi (3m_1 + 6m_2).$$

**Задача 7**

Оси двух дисков радиусом  $r$  соединены стержнем длиной  $4r$ . Диск  $A$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности, другой, массой  $m_2$ , — по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 5r$ . К диску  $A$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Решение**

Заметим, что по условию задачи треугольник  $OBA$  равнобедренный. Отсюда угол между  $CB$  и осью  $x$  равен  $\pi - \varphi$ . Рассмотрим кинематический граф  $C \xrightarrow{-\varphi} B \xrightarrow{\frac{4r}{\varphi}} A$ , где  $C$  — точка касания диска и поверхности, а точки  $O$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой — нормали к общей касательной поверхности и диска. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Cx} - r\omega_{2z} \sin(\pi - \varphi) - 4r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{Ay} &= v_{Cy} + r\omega_{2z} \cos(\pi - \varphi) + 4r\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $v_{Cx} = v_{Cy} = v_{Ax} = 0$ , получаем скорости  $\omega_{2z} = -4\dot{\varphi}$ ,  $v_{Ay} = -8r\dot{\varphi} \sin \varphi$ . Найдём скорость  $B$ . Составив граф  $B \xrightarrow{\frac{4r}{\varphi}} A$ , получим

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Bx} - 4r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{Ay} &= v_{By} + 4r\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Найдём

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} + 4r\dot{\varphi} \sin \varphi = -4r\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} &= v_{Ay} - 4r\dot{\varphi} \cos \varphi = -4r\dot{\varphi} \sin \varphi, \end{aligned}$$

отсюда имеем  $v_B^2 = 16r^2\dot{\varphi}^2$ . Для определения угловой скорости диска  $1$  составим граф  $K \xrightarrow{\frac{r}{\pi/2}} A$ , здесь  $K$  — точка касания диска с поверхностью. В проекции на ось  $x$ :  $v_{Ax} = v_{Kx} - r\omega_{1z} \sin(\pi/2)$ . Ясно, что  $v_{Kx} = 0$ , поэтому  $\omega_{1z} = 4\dot{\varphi} \sin \varphi$ .

Кинетическая энергия однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле:

$$T_1 = \frac{3m_1 v_A^2}{4} = 48m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi, \quad T_2 = \frac{3m_2 v_B^2}{4} = 12m_2 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

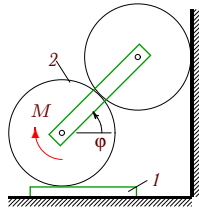
Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B \sin^2 \varphi).$$

Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-M\omega_{1z} + (-m_2g)v_{By}) = -4M \sin \varphi + 4grm_2 \sin \varphi.$$

### Задача 8



Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой  $m_1$ , скользящей по горизонтальной плоскости. Радиусы цилиндров  $r$ . Масса нижнего цилиндра  $m_2$ . К нижнему цилиндру приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

### Решение

Рассмотрим кинематический граф (рис. 6)  $A \xrightarrow{\frac{2r}{\varphi}} B$  вдоль спарника  $AB$ . Соответствующие уравнения для проекций скоростей

$$v_{Bx} = v_{Ax} - 2r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_{By} = v_{Ay} + 2r\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

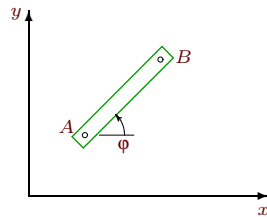


Рис. 6

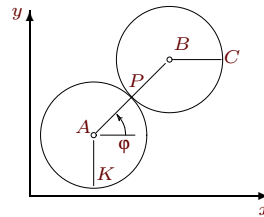


Рис. 7

Учитывая, что  $v_{Ay} = v_{Bx} = 0$ , имеем:  $v_{Ax} = 2r\dot{\varphi} \sin \varphi$ ,  $v_{By} = 2r\dot{\varphi} \cos \varphi$ . Рассмотрим проекции скоростей на ось  $y$  для графа  $B \xrightarrow{\frac{r}{0}} C$  (рис. 7)

$$v_{Cy} = v_{By} + r\omega_{Bz} \cos 0.$$

Откуда получаем угловую скорость верхнего цилиндра

$$\omega_{Bz} = -2\dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (I.7)$$

Проекция скоростей на ось  $x$  для графа  $K \xrightarrow{\pi/2} A \xrightarrow{2r} B$ , где  $K$  — точка касания нижнего цилиндра и пластинки (рис. 7)

$$v_{Bx} = v_{Kx} - r\omega_{Az} \sin \pi/2 - 2r\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Найдем скорость поступательного движения пластинки:

$$v_{Kx} = r\omega_{Az} + 2r\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (I.8)$$

Запишем граф по цилиндрам

$$K \xrightarrow{\pi/2} A \xrightarrow{r} P \xrightarrow{r} B,$$

где  $P$  — точка соприкосновения цилиндров. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей

$$v_{Bx} = v_{Kx} - r\omega_{Az} \sin \pi/2 - r\omega_{Az} \sin \varphi - r\omega_{Bz} \sin \varphi,$$

или

$$v_{Kx} = r\omega_{Az} + r\omega_{Az} \sin \varphi + r\omega_{Bz} \sin \varphi. \quad (I.9)$$

Из (I.7) — (I.9) следует выражение для угловой скорости нижнего цилиндра  $\omega_{Az} = 2\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi)$ , и скорость пластинки  $v_{Kx} = 2r\dot{\varphi}(1 + \cos \varphi + \sin \varphi)$ .

Запишем кинетическую энергию плоского движения цилиндра и поступательного движения пластинки:

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Kx}^2}{2} = 2m_1 r^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos \varphi + \sin \varphi)^2,$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ax}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (A + B \sin^2 \varphi + C \sin 2\varphi).$$

В выражение обобщенной силы войдет только момент:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (-M\omega_{Az}) = -2M(1 + \cos \varphi).$$

## II

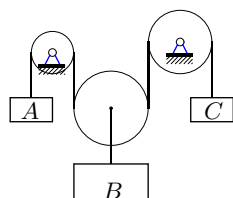
### СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ (ТРИ ТЕЛА)

#### Условия задач

В задачах 2.1-2.42 механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и движется под действием сил тяжести. Три элемента механизма наделены массами, кратными некоторой массе  $m$ . Трением пренебречь. Подвижные и неподвижные блоки считать однородными цилиндрами. Найти величину ускорения груза  $A$  или центра цилиндра  $A$ .

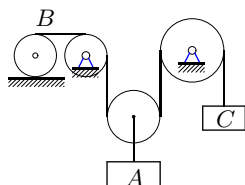
Ответы даны табл. ??, ?? (с. ??, ??).

**2.1**



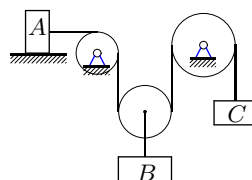
$$m_A = 3m, m_B = 5m, m_C = 4m$$

**2.3**



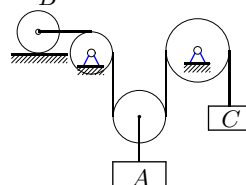
$$m_B = 5m, m_A = 4m, m_C = 4m$$

**2.2**



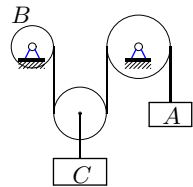
$$m_A = 4m, m_B = 3m, m_C = 3m$$

**2.4**



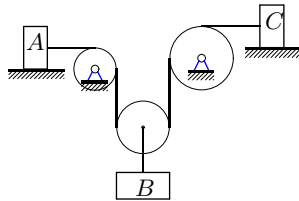
$$m_B = 6m, m_A = 5m, m_C = 4m$$

2.5



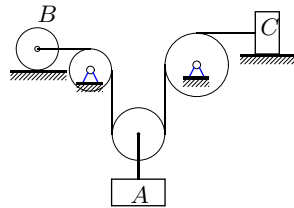
$$m_B = 3m, m_C = 2m, m_A = 3m$$

2.7



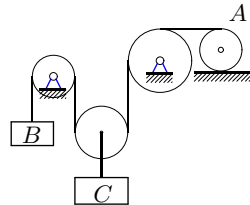
$$m_A = 5m, m_B = 4m, m_C = 6m$$

2.9



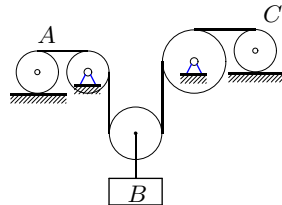
$$m_B = 4m, m_A = 3m, m_C = 5m$$

2.11



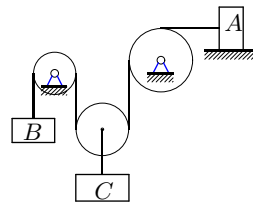
$$m_B = 3m, m_C = 5m, m_A = 7m$$

2.13



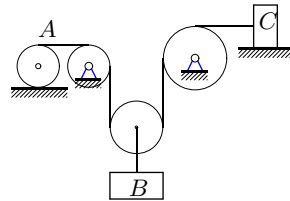
$$m_A = 4m, m_B = 3m, m_C = 5m$$

2.6



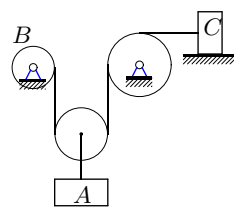
$$m_B = 2m, m_C = 3m, m_A = 5m$$

2.8



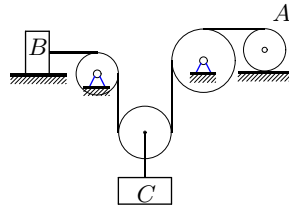
$$m_A = 6m, m_B = 5m, m_C = 7m$$

2.10



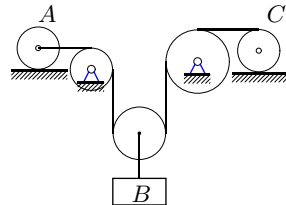
$$m_B = 5m, m_A = 4m, m_C = 6m$$

2.12



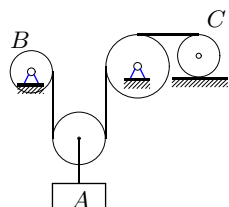
$$m_B = 3m, m_C = 2m, m_A = 4m$$

2.14



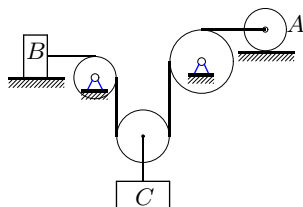
$$m_A = 5m, m_B = 4m, m_C = 6m$$

2.15



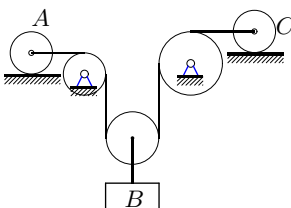
$$m_B = 6m, m_A = 5m, m_C = 7m$$

2.17



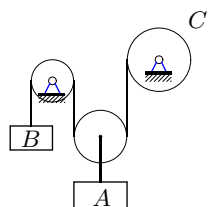
$$m_B = 4m, m_C = 3m, m_A = 5m$$

2.19



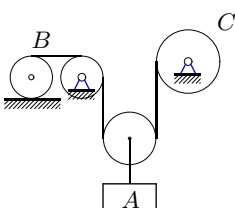
$$m_A = 6m, m_B = 5m, m_C = 7m$$

2.21



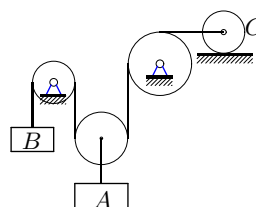
$$m_B = 2m, m_A = 3m, m_C = 5m$$

2.23



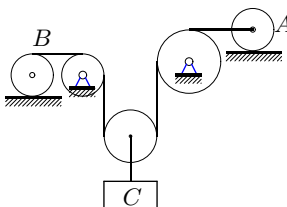
$$m_B = 6m, m_A = 5m, m_C = 7m$$

2.16



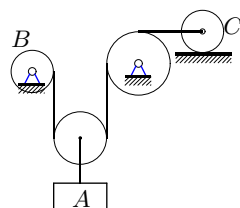
$$m_B = 2m, m_A = 2m, m_C = 4m$$

2.18



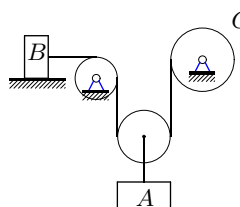
$$m_B = 5m, m_C = 4m, m_A = 6m$$

2.20



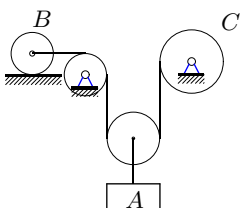
$$m_B = 3m, m_A = 2m, m_C = 4m$$

2.22



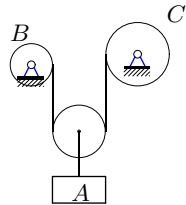
$$m_B = 5m, m_A = 4m, m_C = 6m$$

2.24



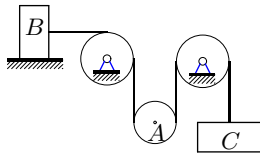
$$m_B = 3m, m_A = 2m, m_C = 4m$$

2.25



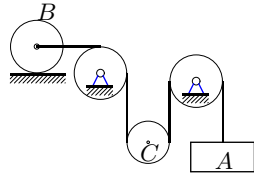
$$m_B = 4m, m_A = 3m, m_C = 5m$$

2.27



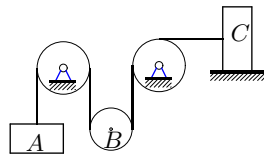
$$m_B = 7m, m_A = 5m, m_C = 4m$$

2.29



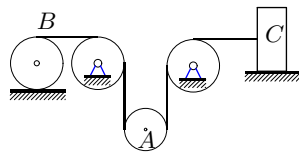
$$m_B = 5m, m_C = 3m, m_A = 3m$$

2.31



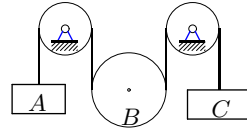
$$m_A = 3m, m_B = 5m, m_C = 8m$$

2.33



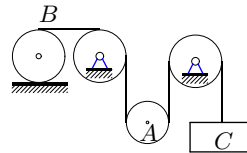
$$m_B = 6m, m_A = 4m, m_C = 7m$$

2.26



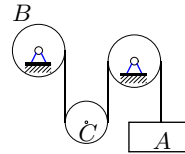
$$m_A = 3m, m_B = 4m, m_C = 4m$$

2.28



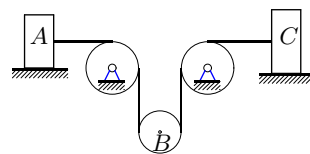
$$m_B = 4m, m_A = 2m, m_C = 3m$$

2.30



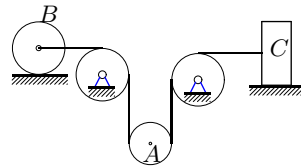
$$m_B = 4m, m_C = 2m, m_A = 3m$$

2.32

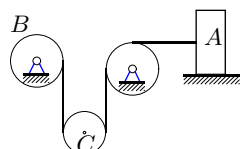


$$m_A = 5m, m_B = 3m, m_C = 6m$$

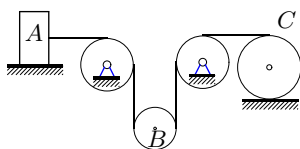
2.34



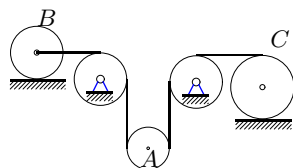
$$m_B = 7m, m_A = 5m, m_C = 8m$$

**2.35**

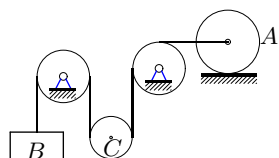
$$m_B = 4m, m_C = 2m, m_A = 5m$$

**2.37**

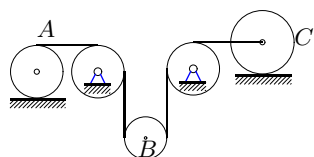
$$m_A = 6m, m_B = 4m, m_C = 7m$$

**2.39**

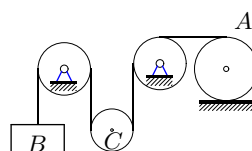
$$m_B = 5m, m_A = 3m, m_C = 6m$$

**2.41**

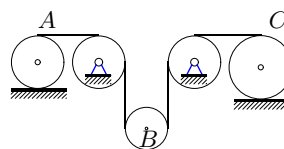
$$m_B = 3m, m_C = 5m, m_A = 8m$$

**2.43**

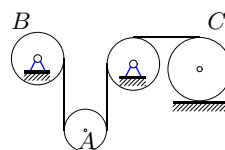
$$m_A = 5m, m_B = 3m, m_C = 6m$$

**2.36**

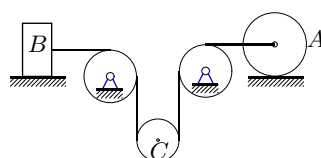
$$m_B = 2m, m_C = 3m, m_A = 6m$$

**2.38**

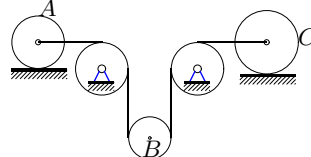
$$m_A = 7m, m_B = 5m, m_C = 8m$$

**2.40**

$$m_B = 6m, m_A = 4m, m_C = 7m$$

**2.42**

$$m_B = 4m, m_C = 2m, m_A = 5m$$

**2.44**

$$m_A = 6m, m_B = 4m, m_C = 7m$$

### Примеры решений

**Задача 1.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из цилиндра и бруска.

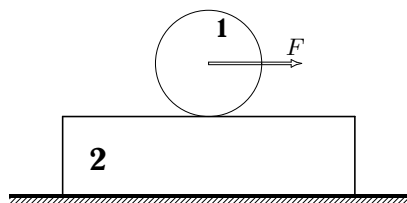


Рис. 8

К оси однородного цилиндра массой  $m_1$  приложена горизонтальная сила  $F$ . Цилиндр катится по брусу массой  $m_2$ . Трение между бруском и горизонтальным основанием отсутствует (рис. 8). Трением качения пренебречь. Найти ускорение центра масс цилиндра.

#### Решение

Выбираем две независимые переменные  $q_1 = x_1$  и  $q_2 = x_2$ , однозначно описывающие положение системы, и составим для них систему уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Пусть переменная  $x_1$  указывает положение центра цилиндра по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $x_2$  — положение бруска относительно той же неподвижной системы отсчета. Направляем оси  $x_2$  и  $x_1$  в сторону движения, т.е. направо (рис.9).

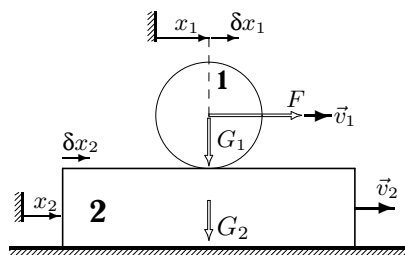


Рис. 9

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}_1 = v_1$  и  $\dot{x}_2 = v_2$ .

Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий цилиндра и бруска:  $T = T_1 + T_2$ . Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J \omega_1^2}{2}. \quad (\text{II.2})$$

Угловая скорость  $\omega_1$  зависит от разности скоростей центра и точки касания. Так как цилиндр катится по бруску без проскальзывания, скорость точки касания равна скорости бруска  $v_2$ :

$$\omega_1 = |v_1 - v_2|/R.$$

Подставляем в (II.2) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси,  $J = m_1 R^2/2$ . В результате получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_1 = \frac{m_1}{4}(2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2).$$

Кинетическая энергия бруска вычисляется по формуле

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Кинетическую энергию всей системы запишем в виде

$$T = \frac{m_1}{4}(2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2) + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Обобщенную силу  $Q_1$  вычисляем по формуле  $Q_1 = \delta A_1 / \delta x_1$ , где  $\delta A_1$  — элементарная работа всех сил на перемещении  $\delta x_1$ . При вычислении элементарной работы  $\delta A_1$  на приращении обобщенной координаты  $x_1$  фиксируется другая обобщенная координата, т.е.  $\delta x_2 = 0$ . Очевидно, что кроме силы  $F$  на таком перемещении ни одна сила работы не совершает, следовательно,  $\delta A_1 = F \delta x_1$  и  $Q_1 = F$ . Аналогично,  $Q_2 = 0$ .

Записываем уравнения Лагранжа (II.1) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial v_1} &= m_1 v_1 + \frac{m_1}{2}(v_1 - v_2), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_1} \right) = \frac{3m_1}{2} W_1 - \frac{m_1}{2} W_2, \\ \frac{\partial T}{\partial v_2} &= m_2 v_2 + \frac{m_1}{2}(v_2 - v_1), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v_2} \right) = -\frac{m_1}{2} W_1 + \left( \frac{m_1}{2} + m_2 \right) W_2, \\ \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0,\end{aligned}$$

где  $W_1 = \dot{v}_1$ ,  $W_2 = \dot{v}_2$ . Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned}3W_1 m_1 - W_2 m_1 &= 2F, \\ -W_1 m_1 + W_2(m_1 + 2m_2) &= 0.\end{aligned}\tag{II.3}$$

Решаем систему уравнений (II.3):

$$W_1 = F \frac{m_1 + 2m_2}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad W_2 = \frac{F}{m_1 + 3m_2}.$$

**Задача 2.** Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из груза  $A$ , скользящего без трения по плоскости, и однородных цилиндров  $B$  и  $C$ . Цилиндр  $C$  падает вертикально вниз и передает движение цилиндру  $B$  и грузу  $A$ , с которыми он связан нерастяжимой нитью. Нить разматывается с цилиндра  $C$ . Даны массы тел  $m_A$ ,  $m_B$ ,  $m_C$  (рис.10). Найти ускорение груза  $A$ .

### Решение

Выбираем две независимые переменные  $q_1 = x$  и  $q_2 = \varphi$ , однозначно описывающие положение системы (рис.11). Переменная  $x$  указывает положение груза по отношению к неподвижной системе отсчета, а  $\varphi$  — поворот цилиндра  $C$  (рис.10).

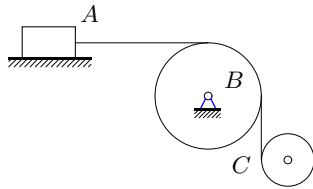


Рис. 10

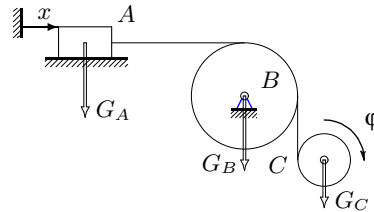


Рис. 11

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{\phi}$ . Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий груза и цилиндров:  $T = T_A + T_B + T_C$ .

Находим кинетическую энергию поступательного движения груза:

$$T_A = \frac{m_A \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося цилиндра

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2} = \frac{m_B R_B^2 (\dot{x}/R_B)^2}{2 \cdot 2} = \frac{m_B \dot{x}^2}{4}.$$

Находим кинетическую энергию цилиндра  $C$ , совершающего плоское движение:

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}.$$

Угловая скорость цилиндра  $C$  —  $\omega_C = \dot{\phi}$ . Скорость центра масс складывается из переносной скорости  $\dot{x}$  и относительной  $R_C \dot{\phi}$ :

$$T_C = \frac{m_C (\dot{x} + R_C \dot{\phi})^2}{2} + \frac{m_C R_C^2 \dot{\phi}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = (1/2) \dot{x}^2 (m_A + m_B/2 + m_C) + \dot{x} \dot{\phi} m_C R_C + (3/4) \dot{\phi}^2 m_C R_C^2.$$

Обобщенную силу  $Q_x$  вычисляем по формуле  $Q_x = \delta A_x / \delta x$ , где  $\delta A_x$  — элементарная работа всех сил на перемещении  $\delta x$ . Фиксируем угол поворота цилиндра  $C$ :  $\delta \phi = 0$ . Груз  $A$  перемещается по горизонтали на расстояние  $\delta x$ , цилиндр  $B$  поворачивается на некоторый угол, а цилиндр  $C$  поступательно перемещается вниз на расстояние  $\delta x$ . На этом перемещении работу совершает только сила  $m_C g$ , следовательно,  $\delta A_x = m_C g \delta x$  и  $Q_x = m_C g$ . Аналогично, фиксируя перемещение груза ( $\delta x = 0$ ), даем приращение углу поворота цилиндра  $C$  и вычисляем  $Q_\phi = m_C g R_C$ .

Записываем уравнения Лагранжа (II.1) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \dot{x}(m_A + 0.5m_B + m_C) + \dot{\phi}R_C m_C, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= \ddot{x}(m_A + 0.5m_B + m_C) + \ddot{\phi}R_C m_C, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{x}R_C m_C + 1.5\dot{\phi}R_C^2 m_C, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{x}R_C m_C + 1.5\ddot{\phi}R_C^2 m_C, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0.\end{aligned}$$

В результате уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned}(m_A + 0.5m_B + m_C)\ddot{x} + m_C R_C \ddot{\phi} &= m_C g, \\ m_C \ddot{x} + 1.5m_C \ddot{\phi} R_C &= m_C g.\end{aligned}\tag{II.4}$$

Решаем систему уравнений (II.4) и находим ускорения:

$$\ddot{x} = \frac{2m_C g}{6m_A + 3m_B + 2m_C}, \quad \ddot{\phi} = \frac{2(2m_A + m_B)g}{R_C(6m_A + 3m_B + 2m_C)}.$$

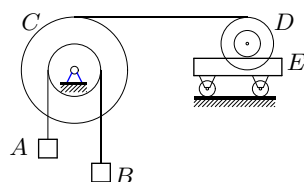
### III СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ (ПЯТЬ ТЕЛ)

#### Условия задач

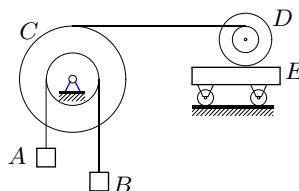
В задачах 3.1 – 3.30 механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из пяти тел. Блок (или однородный цилиндр)  $D$  катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости или по подвижной тележке массой  $m_E$ . Блок состоит из двух соосных жестко скрепленных цилиндров. Массой колес тележки пренебречь. Грузы  $A$ ,  $B$  и ось однородного цилиндра  $E$  перемещаются вертикально под действием сил тяжести. Даны массы  $m_A = 10$  кг,  $m_B = 11$  кг,  $m_C = 12$  кг,  $m_D = 13$  кг,  $m_E = 14$  кг, радиусы  $R_C = 24$  см,  $r_C = 10$  см,  $R_D = 20$  см,  $r_D = 15$  см и радиусы инерции блоков  $\rho_C = 20$  см,  $\rho_D = 24$  см. В тех вариантах, где тело  $D$  — однородный цилиндр, принять  $r_D = 15$  см. Трением качения пренебречь. Найти ускорение груза  $A$ .

Ответы (в  $\text{м/с}^2$ ) даны в табл. ?? на с. ??

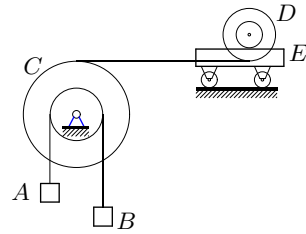
**3.1**



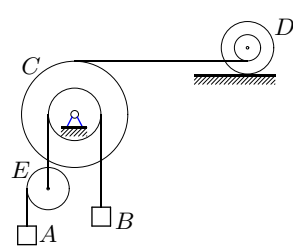
**3.2**



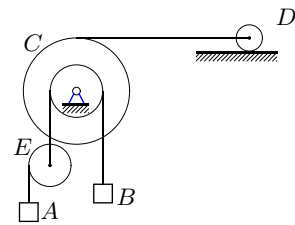
3.3



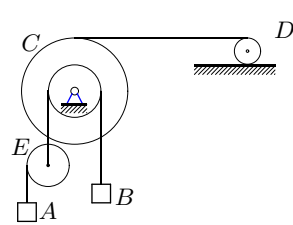
3.4



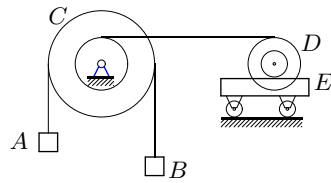
3.5



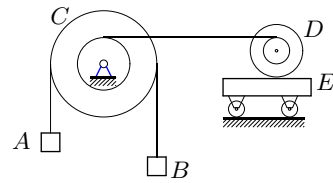
3.6



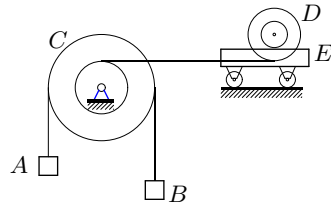
3.7



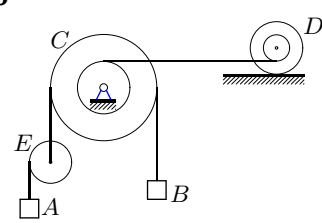
3.8



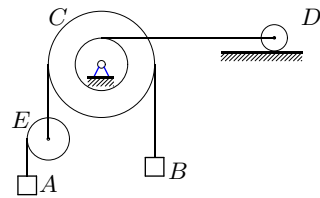
3.9



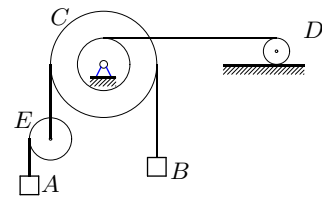
3.10



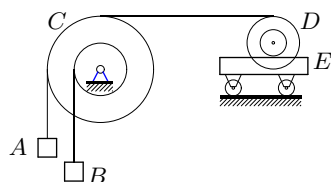
3.11



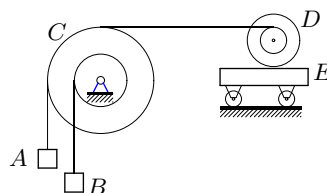
3.12



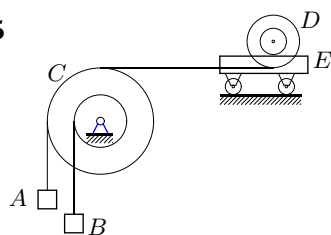
3.13



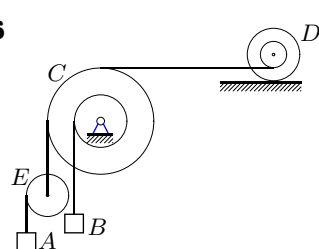
3.14



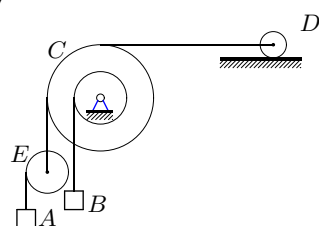
3.15



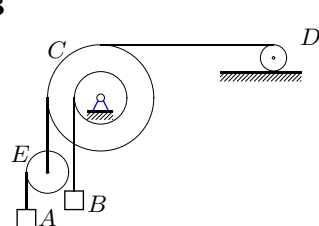
3.16



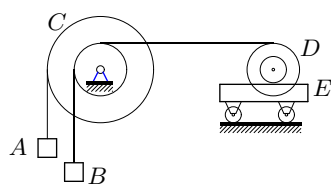
3.17



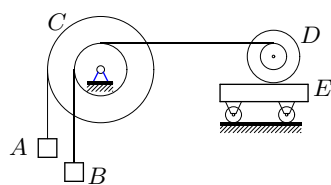
3.18



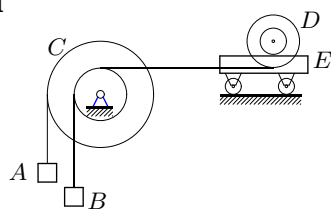
3.19



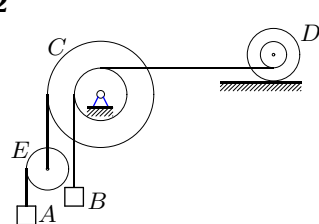
3.20



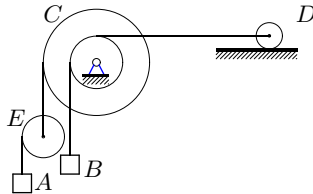
3.21



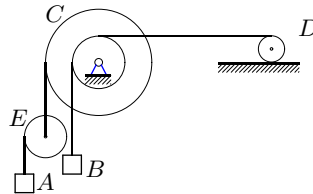
3.22



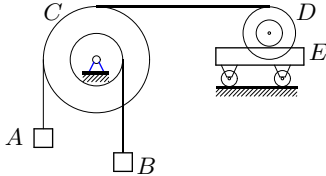
3.23



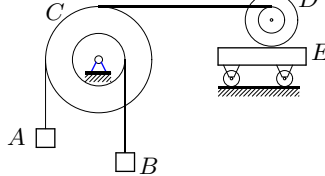
3.24



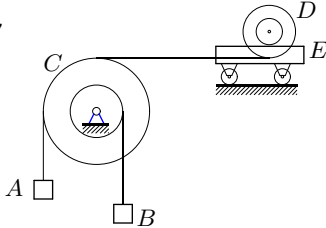
3.25



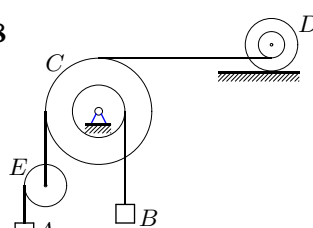
3.26



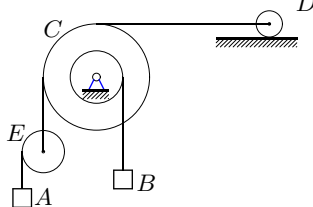
3.27



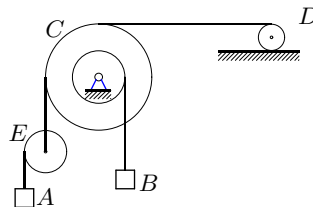
3.28



3.29



3.30



### Примеры решения

**Задача 1.** Механическая система состоит из груза  $A$ , бруса  $B$ , блока колес  $C$  и однородных цилиндров  $D$  и  $E$  (рис. 12). Цилиндр  $D$  катится без проскальзывания и без трения качения по бруску, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности. Даны массы  $m_A = 0,6$  кг,  $m_B = 25$  кг,  $m_C = 5$  кг,  $m_D = 40$  кг,  $m_E = 16$  кг. Оси цилиндров  $D$  и  $E$  соединены горизонтальным жестким стержнем.

Внешний радиус блока  $R_C = 0,5$  м, внутренний  $r_C = 0,3$  м, радиус инерции  $\rho_C = 0,4$  м. Найти ускорение груза  $A$ .

### Решение

Система имеет две степени свободы. Решим задачу с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода <sup>1)</sup>. Выберем обобщенные координаты:  $y$  — вертикальное смещение груза  $A$  и  $s$  — перемещение центральной оси цилиндра  $E$ . Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial s}.$$

Найдем кинетическую энергию системы  $T$ , как функцию обобщенных скоростей  $\dot{y}$  и  $\dot{s}$  и потенциальную  $\Pi$  как функцию обобщенных координат  $y$  и  $s$ . Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы  $T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E$ .

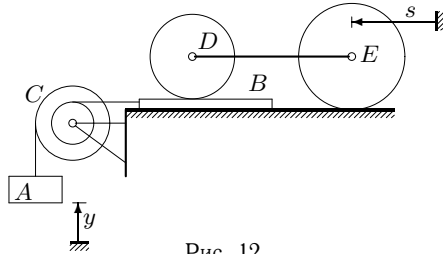


Рис. 12

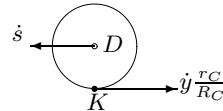


Рис. 13

Определим кинетические энергии груза  $A$  и бруска  $B$ , движущихся поступательно:

$$T_A = \frac{m_A \dot{y}^2}{2}, \quad T_B = \frac{m_B v_B^2}{2},$$

где модуль скорости бруска выразим через модуль угловой скорости блока колес  $C$   $v_B = \omega_C r_C$ . Очевидно,  $\omega_C = \dot{y}/R_C$ , откуда  $v_B = \dot{y} r_C/R_C$ .

<sup>1)</sup> Другой вариант решения задачи с двумя степенями свободы — с помощью общих уравнений динамики [6].

Кинетическая энергия вращения блока  $C$  выражаем по формуле

$$T_C = \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

где  $J_C = m_C \rho_C^2$ .

Находим кинетическую энергию цилиндра  $D$ , совершающего плоское движение:

$$T_D = \frac{m_D v_D^2}{2} + \frac{J_D \omega_D^2}{2}.$$

Угловая скорость  $\omega_D$  зависит от скоростей центра  $D$  и точки касания (рис. 13). Так как стержень, соединяющий цилиндры жесткий, то  $v_D = \dot{s}$ . Цилиндр катится по бруску без проскальзывания, поэтому скорость точки касания  $v_K$  равна скорости бруска  $v_B$ . Составим граф  $K \xrightarrow{R_D/\pi/2} D$ , для которого уравнение для скоростей в проекции на горизонталь имеет вид

$$v_{Dx} = v_{Kx} - R_D \omega_D \sin(\pi/2)$$

или  $-\dot{s} = \dot{y} r_C / R_C - R \omega_D$  откуда  $\omega_D = (\dot{s} + \dot{y} r_C / R_C) / R_D$ .

Кинетическая энергия цилиндра  $E$  (см. с.33)

$$T_E = \frac{3m_E \dot{s}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия каждого тела с учетом числовых значений имеет вид

$$T_A = 0,3\dot{y}^2, \quad T_B = 4,5\dot{y}^2, \quad T_C = 1,6\dot{y}^2,$$

$$T_D = 3,6\dot{y}^2 + 12\dot{y}\dot{s} + 30\dot{s}^2, \quad T_E = 12\dot{s}^2.$$

Запишем суммарную кинетическую энергию механизма:

$$T = 10\dot{y}^2 + 12\dot{y}\dot{s} + 42\dot{s}^2.$$

Потенциальная энергия вычисляется как работа совершенная силами, приложенными к механизму, на перемещениях, возвращающих обобщенные координаты в условный "нуль". Очевидно, работа силы тяжести  $m_A g$  груза  $A$  на перемещении вниз на расстояние  $y$  равна  $m_A g y$ , а на перемещении  $s$  ни одна сила работы не совершит (силы тяжести цилиндров вертикальны, а перемещение горизонтально). В итоге потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = m_A g y.$$

Запишем уравнения Лагранжа

$$20\ddot{y} + 12\ddot{s} = -0,6g,$$

$$12\ddot{y} + 84\ddot{s} = 0.$$

Решая систему двух алгебраических уравнений, находим искомое ускорение  $\ddot{y} = -0,0328g = -0,322 \text{ м/с}^2$ . Знак минус в ответе показывает, что ускорение направлено вниз, груз опускается с ускорением.

**Задача 2.** Механическая система состоит из груза  $A$ , однородного цилиндра  $B$ , блока колес  $C$  с неподвижной осью и грузов  $D$  и  $E$  (рис. 14). Ось цилиндра  $B$  соединена с грузом  $E$  тонкой нерастяжимой нитью. На обод цилиндра  $B$  намотана нить, на которой висит груз  $A$ . С внешнего обода блока колес  $C$  свисает груз  $D$ . Даны массы  $m_A = 1 \text{ кг}$ ,  $m_B = 8 \text{ кг}$ ,  $m_C = 3 \text{ кг}$ ,  $m_D = 4 \text{ кг}$ ,  $m_E = 5 \text{ кг}$ . Внешний радиус блока  $R_C = 0,6 \text{ м}$ , внутренний  $r_C = 0,4 \text{ м}$ , радиус инерции  $\rho_C = 0,4 \text{ м}$ . Найти ускорение груза  $A$ .

### Решение

Система имеет две степени свободы. Решим задачу с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода. Выберем обобщенные координаты:  $y$  — вертикальное смещение груза  $A$  и  $s$  — горизонтальное перемещение груза  $E$  (налево). Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} &= Q_s, \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

где  $Q_y$  и  $Q_s$  — обобщенные силы.

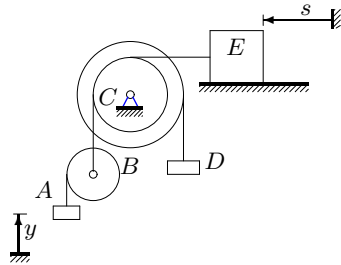


Рис. 14

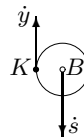


Рис. 15

Найдем кинетическую энергию системы  $T$  как функцию обобщенных скоростей  $\dot{y}$  и  $\dot{s}$ . Кинетическую энергию всей системы представим в виде суммы

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E.$$

Кинетическая энергия груза определяется по формуле

$$T_A = \frac{m_A \dot{y}^2}{2},$$

а кинетическая энергия цилиндра  $B$ , совершающего плоское движение:

$$T_B = \frac{m_B v_B^2}{2} + \frac{J_B \omega_B^2}{2},$$

где скорость центра масс равна скорости груза  $E$ :  $v_B = \dot{s}$ . Момент инерции однородного цилиндра радиуса  $r_B$ :  $J_B = m_B r_B^2 / 2$ . Чтобы найти угловую скорость  $\omega_B$  необходимо использовать кинематический граф  $K \xrightarrow{r_B} B$ , составленный по цилиндру  $B$  от точки обода до центра, из которого следует уравнение для скоростей в проекцию на вертикаль (рис. 15)

$$v_{By} = v_{Ky} + r_B \omega_{Bz} \cos 0,$$

или  $-\dot{s} = \dot{y} + r_B \omega_B$ , откуда  $\omega_{Bz} = -(\dot{s} + \dot{y})/r_B$ .

Найдем кинетическую энергию вращения блока колес  $C$

$$T_C = \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

где  $J_C = m_C r_C^2$ ,  $\omega_C = \dot{s}/r_C$ .

Кинетическая энергия груза  $D$  имеет вид

$$T_D = \frac{m_D v_D^2}{2},$$

где модуль скорости

$$v_D = \omega_C R_C = \dot{s} R_C / r_C. \quad (\text{III.2})$$

Вычислим кинетическую энергию груза  $E$ :

$$T_E = \frac{m_E \dot{s}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия каждого тела с учетом числовых значений имеет вид

$$T_A = 0,5\dot{y}^2, \quad T_B = 4\dot{s}^2 + 2(\dot{y} + \dot{s})^2, \quad T_C = 3\dot{s}^2/2, \\ T_D = 9\dot{s}^2/2, \quad T_E = 5\dot{s}^2/2.$$

Запишем суммарную кинетическую энергию механизма

$$T = 2,5\dot{y}^2 + 4\dot{y}\dot{s} + 14,5\dot{s}^2. \quad (\text{III.3})$$

Обобщенные силы будем вычислять как коэффициенты при приращениях соответствующих обобщенных координат в выражении для элементарной работы на этом приращении. Даем приращение  $\delta y$  (координата  $s$  при этом фиксируется, следовательно, тела  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  неподвижны, и силы, приложенные к ним, работы не совершают). Получим

$$\delta A_y = -m_A g \delta y,$$

отсюда  $Q_y = -m_A g$ . Аналогично, фиксируем координату  $y$  (груз  $A$  неподвижен) и даем приращение  $\delta s$ . Ось цилиндра  $B$  опустится, и сила тяжести совершит положительную работу  $\delta A = m_B g \delta s$ . Груз  $D$  поднимется на высоту  $\delta s R_C / r_C$ , которую легко вычислить, используя выражение для скорости (III.2). В итоге,

$$\delta A_s = m_B g \delta s - m_D g \delta s R_C / r_C.$$

Подставим кинетическую энергию (III.3) и обобщенные силы  $Q_y$  и  $Q_s$  в уравнения Лагранжа (III.1). Учитывая независимость кинетической энергии от обобщенных координат

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

получим

$$5\ddot{y} + 4\ddot{s} = -g,$$

$$4\ddot{y} + 29\ddot{s} = 2g.$$

Решая систему двух алгебраических уравнений, находим ускорения  $\ddot{y} = -(37/129)g = -2,814 \text{ м/с}^2$ ,  $\ddot{s} = (14/129)g = 1,065 \text{ м/с}^2$ . Здесь  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Ускорение груза  $A$  меньше нуля, следовательно, согласно выбранному направлению обобщенной координаты (вверх), ускорение груза направлено вниз.

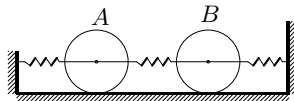
# IV **КОЛЕБАНИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

## **Условия задач**

В задачах 4.1-4.30 механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и нескольких линейно упругих пружин с одинаковой жесткостью  $c$ . Цилиндры катаются без проскальзывания и сопротивления по горизонтальной поверхности, пружины в положении равновесия не имеют предварительного напряжения. Массой пружин пренебречь. Определить частоты собственных колебаний системы.

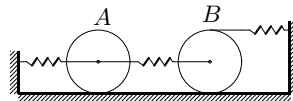
Ответы приведены в табл.?? на с. ??.

**4.1**



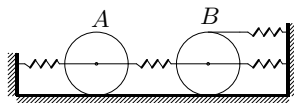
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 1 \text{ Н/м}$$

**4.2**



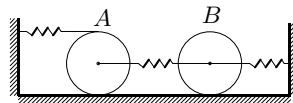
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 2 \text{ Н/м}$$

**4.3**



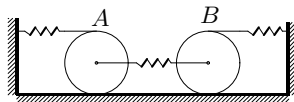
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 6 \text{ Н/м}$$

**4.4**



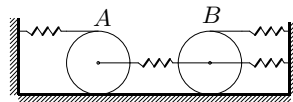
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 8 \text{ Н/м}$$

**4.5**



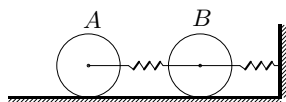
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 8 \text{ Н/м}$$

**4.6**



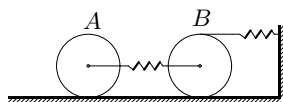
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 7 \text{ Н/м}$$

4.7



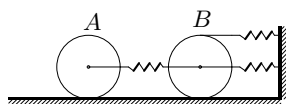
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 10 \text{ Н/м}$$

4.8



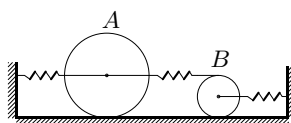
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 11 \text{ Н/м}$$

4.9



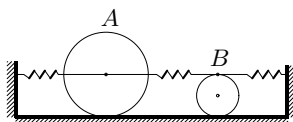
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 12 \text{ Н/м}$$

4.10



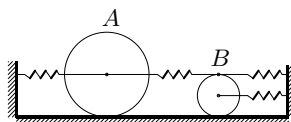
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 11 \text{ Н/м}$$

4.11



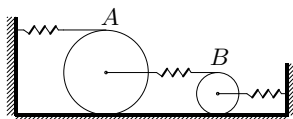
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 11 \text{ Н/м}$$

4.12



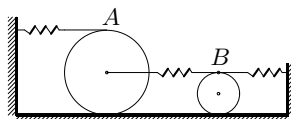
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 13 \text{ Н/м}$$

4.13



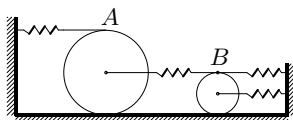
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 14 \text{ Н/м}$$

4.14



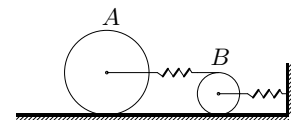
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 5 \text{ кг}, c = 16 \text{ Н/м}$$

4.15



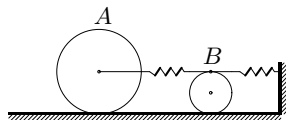
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 5 \text{ кг}, c = 17 \text{ Н/м}$$

4.16



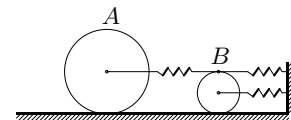
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 20 \text{ Н/м}$$

4.17

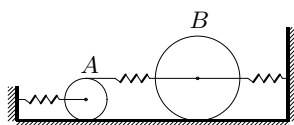


$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 17 \text{ Н/м}$$

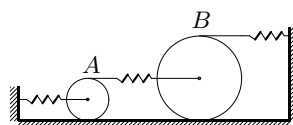
4.18



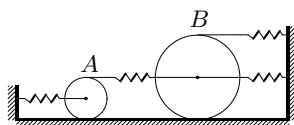
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 22 \text{ Н/м}$$

**4.19**

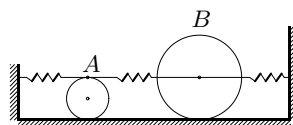
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 20 \text{ Н/м}$$

**4.20**

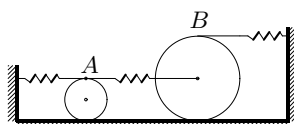
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 5 \text{ кг}, c = 22 \text{ Н/м}$$

**4.21**

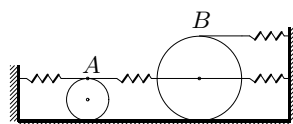
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 9 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$$

**4.22**

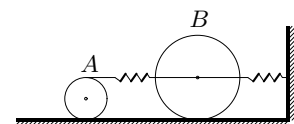
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 7 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$$

**4.23**

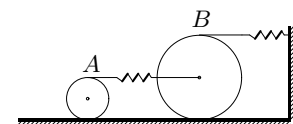
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 23 \text{ Н/м}$$

**4.24**

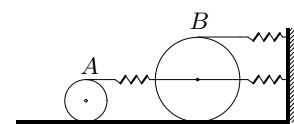
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$$

**4.25**

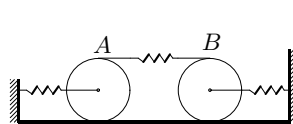
$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 25 \text{ Н/м}$$

**4.26**

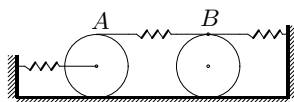
$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 27 \text{ Н/м}$$

**4.27**

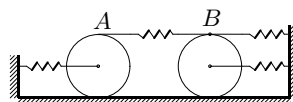
$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 28 \text{ Н/м}$$

**4.28**

$$m_A = 2 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 29 \text{ Н/м}$$

**4.29**

$$m_A = 4 \text{ кг}, m_B = 3 \text{ кг}, c = 30 \text{ Н/м}$$

**4.30**

$$m_A = 6 \text{ кг}, m_B = 1 \text{ кг}, c = 30 \text{ Н/м}$$

### Пример решения

**Задача.** Механическая система с двумя степенями свободы состоит из двух однородных цилиндров и двух линейно упругих пружин. Цилиндр  $A$  массой  $m_A = 50$  кг может кататься без проскальзывания и трения качения по горизонтальной поверхности. Его ось соединена с неподвижной стенкой горизонтальной пружиной 1. Ободы цилиндров связаны нитью и пружиной 2. Цилиндр  $B$  массой  $m_B = 20$  кг вращается вокруг неподвижной оси. Жесткость пружин, работающих и на сжатие и на растяжение, одинакова:  $c = 90$  Н/м. Массой пружин

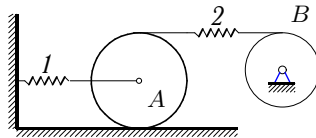


Рис. 16

пренебречь. Найти частоты собственных колебаний системы.

Задачу решим двумя способами. Различие между ними — в выборе обобщенных координат и форме вычисления обобщенных сил в уравнении Лагранжа.

#### 1-й способ

В качестве обобщенных координат выбираем удлинения пружин (рис. 17). Связи предполагаем идеальными и их реакции на рисунке не показываем.

Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел:  $T = T_A + T_B$ , выражаем через обобщенные скорости  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ . Кинетическая энергия однородного цилиндра  $A$ , катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле

$$T_A = (3/4)m_A\dot{x}_1^2. \quad (\text{IV.1})$$

Кинетическая энергия вращения цилиндра  $B$  вокруг неподвижной оси имеет вид  $T_B = J_B\omega_B^2/2$ , где  $J_B = m_BR_B^2/2$ .

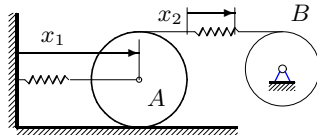


Рис. 17

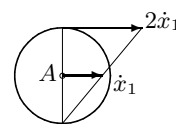


Рис. 18

Левый конец пружины 2 движется со скоростью  $2\dot{x}_1$  (рис. 18), скорость удлинения пружины  $\dot{x}_2$ . Скорость правого конца пружины равна скорости точки обода цилиндра  $B$  и равна сумме  $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ , отсюда  $\omega_B = (2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/R_B$  — угловая скорость вращения цилиндра  $B$ . Таким образом, получаем:  $T_B = m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2/4$ . Кинетическая энергия всей системы

$$T = (3/4)m_A\dot{x}_1^2 + (1/4)m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2.$$

Для того, чтобы вычислить обобщенную силу  $Q_1$ , даем возможное перемещение (удлинение)  $\delta x_1$  пружине 1, фиксируя удлинение пружины 2, или, заменяя пружину 2 нерастяжимой нитью (рис. 19).

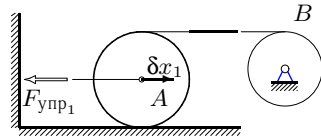


Рис. 19

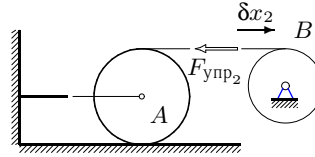


Рис. 20

Воспользуемся формулой  $Q_1 = \delta A_1 / \delta x_1$ , где  $\delta A_1 = -F_{\text{упр}1} \delta x_1$ . Так как  $F_{\text{упр}1} = cx_1$ , то  $Q_1 = -cx_1$ . Аналогично, фиксируя удлинение пружины 1, растягиваем пружину 2 на  $\delta x_2$  (рис. 20) и вычисляем  $\delta A_2 = -F_{\text{упр}2} \delta x_2$ . Отсюда  $Q_2 = -cx_2$ .

Записываем систему уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2. \end{aligned}$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= 1.5m_A\dot{x}_1 + m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2), & \frac{\partial T}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= 0.5m_B(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2), & \frac{\partial T}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} (2m_B + 1.5m_A)\ddot{x}_1 + m_B\ddot{x}_2 &= -cx_1, \\ m_B\ddot{x}_1 + 0.5m_B\ddot{x}_2 &= -cx_2. \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Записываем (IV.2) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид

$$a_{11} = 2m_B + 1.5m_A, \quad a_{12} = a_{21} = m_B, \quad a_{22} = 0.5m_B.$$

Коэффициенты жесткости системы  $c_{11} = c_{22} = c$ ,  $c_{12} = c_{21} = 0$ . Коэффициенты жесткости и инерционные коэффициенты образуют симметричные матрицы. Предполагая, что каждая обобщенная координата меняется по закону гармонических колебаний, решение системы (IV.3) ищем в форме

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0),$$

где  $A_1, A_2, \omega, \beta_0$  — неизвестные постоянные. Система (IV.2) после сокращения на  $\sin(\omega t + \beta_0)$  принимает вид

$$\begin{aligned} (c - (2m_B + 1.5m_A)\omega^2)A_1 - m_B\omega^2 A_2 &= 0, \\ -m_B\omega^2 A_1 + (c - 0.5m_B\omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы для  $A_1$  и  $A_2$  получаем уравнение частот:

$$\frac{3}{4}m_A m_B \omega^4 - \frac{3m_A + 5m_B}{2}c\omega^2 + c^2 = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Подставляем числовые данные задачи, решаем биквадратное уравнение (IV.5) и находим две частоты собственных колебаний системы:  $\omega_1 = 0,871$  рад/с,  $\omega_2 = 3,774$  рад/с.

## 2-й способ

В качестве первой обобщенной координаты выбираем смещение  $x$  цилиндра  $A$ , а в качестве другой — угол поворота  $\phi$  цилиндра  $B$  (рис. 21). Таким образом,  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \phi$ .

Кинетическую энергию системы, состоящую из суммы кинетических энергий двух тел,  $T = T_A + T_B$ , выражаем через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{\phi}$ . Кинетическая энергия цилиндра  $A$  вычисляется так же, как и в 1-м способе по формуле (IV.1):  $T_A = 3m_A \dot{x}^2/4$ . Кинетическая энергия вращения цилиндра  $B$

$$T_B = J_B \dot{\phi}^2/2 = m_B \dot{\phi}^2 R_B^2/4.$$

Кинетическая энергия всей системы  $T = (3/4)m_A\dot{x}^2 + m_B\dot{\phi}^2 R_B^2/4$ . Для того, чтобы вычислить обобщенные силы находим потенциальную энергию системы. Силы тяжести работу не совершают, поэтому вся потенциальная энергия содержится в пружинах. Удлинение первой пружины равно  $x$ . Левый конец пружины 2 смещается на  $2x$ , правый — на  $R_B\phi$  в ту же сторону (рис. 22).

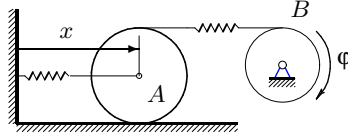


Рис. 21

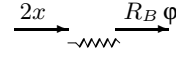


Рис. 22

Удлинение второй пружины равно по модулю  $|2x - R_B\phi|$ . Потенциальная энергия пружин, не имеющих предварительного напряжения, имеет вид

$$\Pi = \frac{c}{2}x^2 + \frac{c}{2}(2x - R_B\phi)^2.$$

Обобщенные силы вычисляем по формулам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(5x - 2R_B\phi), \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = -cR_B(R_B\phi - 2x).$$

Вычисляем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= 1.5 m_A \dot{x}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= 0.5 m_B R_B^2 \dot{\phi}, & \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$1.5 m_A \ddot{x} = -c(5x - 2R_B\phi), \tag{IV.6}$$

$$0.5 m_B R_B^2 \ddot{\phi} = -cR_B(R_B\phi - 2x).$$

Записываем (IV.6) в стандартной форме уравнений колебаний системы с двумя степенями свободы (IV.3). Инерционные коэффициенты для данного примера имеют вид  $a_{11} = 1.5 m_A$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 0.5 m_B R_B^2$ . Коэффициенты жесткости:  $c_{11} = 5c$ ,  $c_{12} = c_{21} = -2cR_B$ ,  $c_{22} = cR_B^2$ . Решение системы (IV.3) ищем в форме гармонических колебаний:  $x = A_1 \sin(\omega t + \beta_0)$ ,  $\phi = A_2 \sin(\omega t + \beta_0)$ , где  $A_1, A_2, \omega, \beta_0$  —

неизвестные постоянные. Система (IV.6) после сокращения на общий множитель  $\sin(\omega t + \beta_0)$  принимает вид

$$\begin{aligned} (5c - 1.5m_A \omega^2)A_1 - 2cR_B A_2 &= 0, \\ -2cA_1 + R_B(c - 0.5m_B \omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Для неизвестных амплитуд колебаний  $A_1$  и  $A_2$  система (IV.7) является однородной. Из условия существования нетривиального решения приравняем нулю определитель системы и получаем уравнение частот, в точности совпадающее с (IV.5). Таким образом, с другим набором обобщенных координат мы находим те же частоты:  $\omega_{1,2}^2 = (75 \pm 3\sqrt{505})/10$ , или  $\omega_1 = 0.871$  рад/с,  $\omega_2 = 3.774$  рад/с.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение задачи равносильно отысканию собственных значений матрицы  $A^{-1}C$ , где  $A$  и  $C$  — матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Действительно, представим (IV.3) в виде  $A\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0$ , где  $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$ . Умножим это уравнение на обратную матрицу  $A^{-1}$ . Получаем, что  $\ddot{\vec{x}} + A^{-1}C\vec{x} = 0$ . Решение ищем в форме гармонических колебаний, записываем систему однородных линейных уравнений для амплитуд колебаний, определитель которой имеет вид  $\det(-\omega^2 E + A^{-1}C)$ , где  $E$  — единичная матрица. Таким образом, квадраты частот равны собственным значениям матрицы  $A^{-1}C$  ([5], §2.10). Напомним, собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$  являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

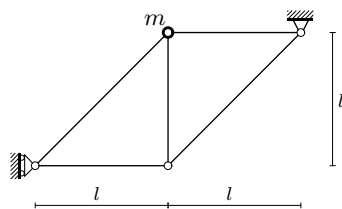
## V КОЛЕБАНИЕ УЗЛА ФЕРМЫ

### Условия задач

В задачах 5.1-5.30 в одном из шарниров плоской фермы находится точка с массой  $m$ . Стержни фермы упругие. Жесткость стержней  $EF$ ;  $l = 1$  м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней и опор, определить частоты собственных малых колебаний шарнира фермы.

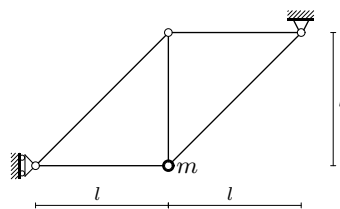
Ответы даны в табл. ?? на с. ??.

**5.1**



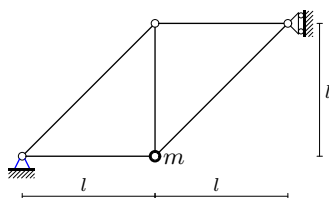
$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг}$

**5.2**



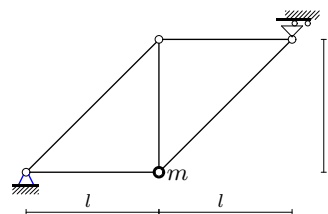
$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг}$

**5.3**



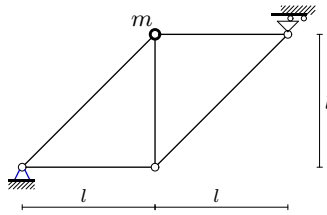
$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг}$

**5.4**



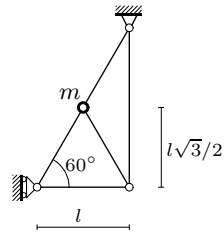
$EF = 0,4 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг}$

5.5



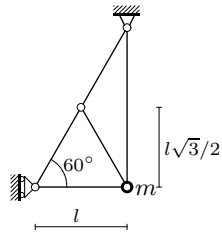
$$EF = 0,4 \text{ кН}, m = 9 \text{ кг}$$

5.6



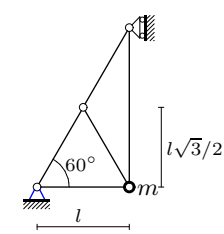
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

5.7



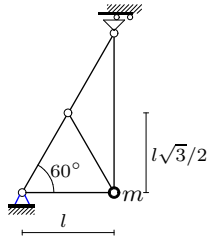
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

5.8



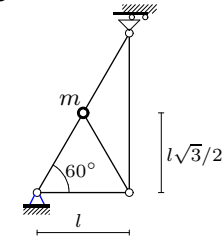
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

5.9



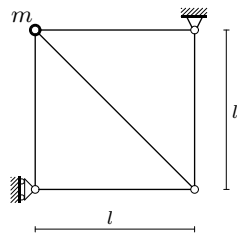
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

5.10



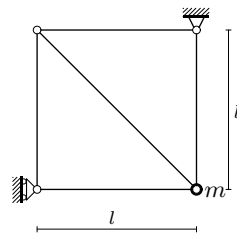
$$EF = 0,9 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг}$$

5.11



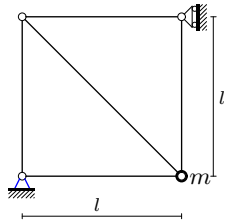
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

5.12



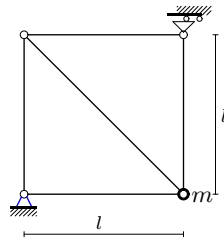
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

5.13



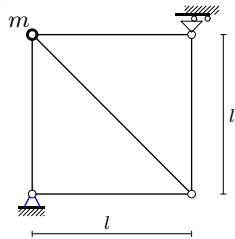
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

5.14



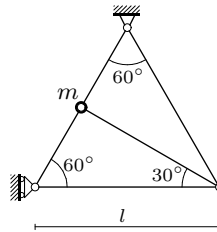
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

5.15



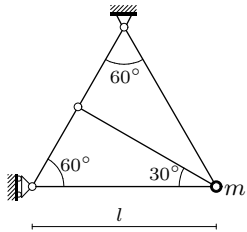
$$EF = 1,6 \text{ кН}, m = 49 \text{ кг}$$

5.16



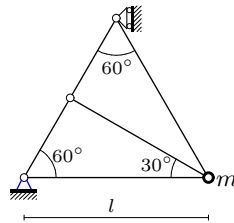
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг}$$

5.17



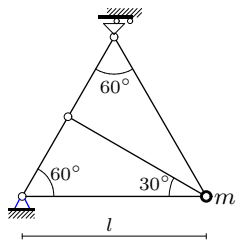
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

5.18



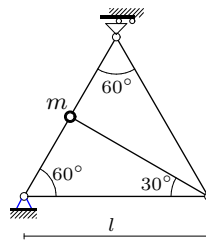
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

5.19



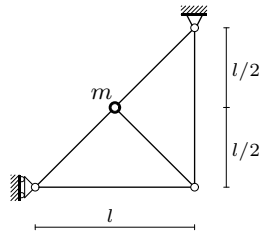
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

5.20



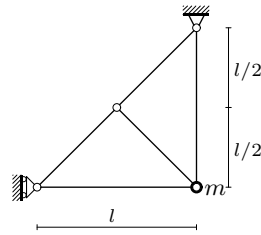
$$EF = 2,5 \text{ кН}, m = 81 \text{ кг}$$

5.21



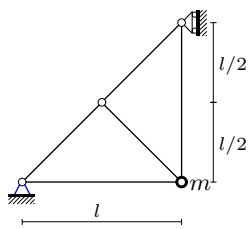
$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

5.22



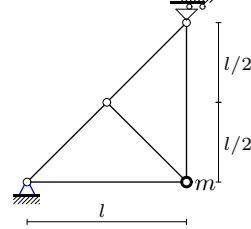
$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 4 \text{ кг}$$

5.23



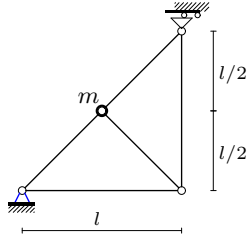
$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 25 \text{ кг}$$

5.24



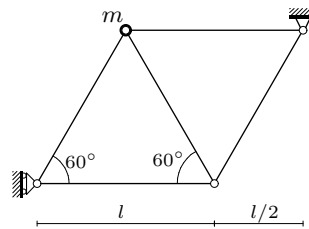
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

5.25



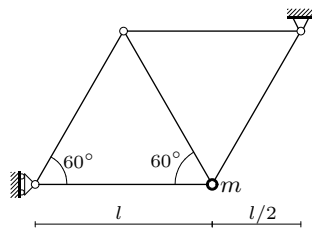
$$EF = 3,6 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

5.26



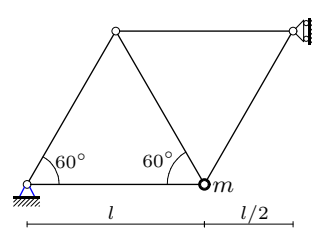
$$EF = 6,4 \text{ кН}, m = 16 \text{ кг}$$

5.27



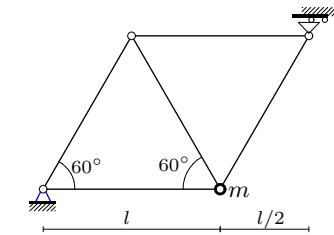
$$EF = 6,4 \text{ кН}, m = 36 \text{ кг}$$

5.28



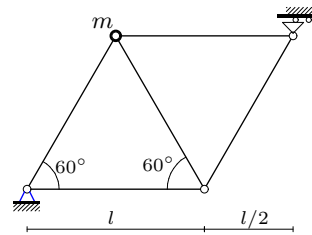
$$EF = 6,4 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

5.29



$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 64 \text{ кг}$$

5.30



$$EF = 4,9 \text{ кН}, m = 1 \text{ кг}$$

### Пример решения

**Задача.** В шарнире  $C$  плоской фермы находится точка с массой  $m = 9 \text{ кг}$  (рис. 23). Материал стержней имеет модуль упругости  $E$ ,

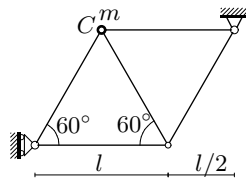


Рис. 23

площадь сечения стержней  $F$ , жесткость всех стержней фермы одинакова,  $EF = 0,1 \text{ кН}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ . Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, шарниров и подвижной опоры, определить частоты собственных малых колебаний шарнира  $C$ .

С учетом упругости стержней система имеет две степени свободы. Основные уравнения задачи следуют из уравнения Лагранжа 2-го рода. В качестве обобщенных координат принимаем горизонтальные и вертикальные перемещения узла  $x_1$  и  $x_2$ . Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0, \quad (\text{V.1})$$

где  $A$  — матрица инерции,  $C$  — матрица жесткости. Матрица обратная  $C$  — матрица податливости  $B = C^{-1}$ , коэффициенты которой

(перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла–Мора [13]:

$$b_{ij} = b_{ji} = \sum_{\mu=1}^n S_{i,\mu} S_{j,\mu} \frac{l_{\mu}}{EF}, \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{V.2})$$

где  $l_{\mu}$  — длины стержней,  $E$  и  $F$  — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержней,  $S_{i,\mu}$  — безразмерное усилие в стержне с номером  $\mu$  от действия единичной горизонтальной ( $i = 1$ ) или вертикальной ( $i = 2$ ) нагрузки на шарнир с массой. Произведение  $EF$  называют жесткостью, в данной задаче она считается одинаковой для всех стержней фермы. Коэффициенты  $b_{ij}$  имеют простой физический смысл:  $b_{ij}$  — это перемещение узла в направлении  $i$  под действием единичной силы, действующей в направлении  $j$ . Измеряются  $b_{ij}$  в м/Н. По теореме взаимности Бетти <sup>1)</sup>  $b_{ij} = b_{ji}$ .

Кинетическая энергия точки имеет вид  $T = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$ , следовательно, матрица инерции является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Умножая (V.1) на  $B$  и делая подстановку  $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$ , что равносильно замене

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_0),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_0),$$

где  $A_1, A_2$  — амплитуды,  $\omega$  — частота,  $\beta_0$  — начальная фаза колебаний, получаем однородную систему

$$m\omega^2 B\vec{x} - \vec{x} = 0,$$

имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Следовательно, задача свелась к поиску собственных значений матрицы  $B$ .

#### ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. К шарниру, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу. Определяем усилия в стержнях  $S_{1,\mu}$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ , где  $n$  — число стержней фермы.

<sup>1)</sup> Энрико Бетти (1823 — 1892) — итальянский математик.

2. Прикладываем к этому же шарниру единичную вертикальную силу. Определяем усилия в стержнях  $S_{2,\mu}$ .

3. Используя формулу Максвелла–Мора (V.2), вычисляем коэффициенты податливости  $b_{ij}$ . Записываем их в симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$ .

5. Находим частоты собственных колебаний

$$\omega_k = 1/\sqrt{m\lambda_k}, \quad k = 1, 2.$$

### Решение

1. К шарниру  $C$ , наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу (рис. 24). Находим реакции опор  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$  от единичной силы. Составляем для этого три уравнения равновесия фермы как жесткого целого

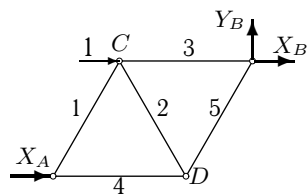


Рис. 24

$$\begin{aligned} X_A + X_B + 1 &= 0, \\ Y_B &= 0, \\ X_A l \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (V.3)$$

Очевидное решение системы:  $X_A = 0$ ,  $Y_B = 0$ ,  $X_B = -1$ . Методом вырезания узлов<sup>1)</sup> определяем усилия в стержнях (рис. 25, 26, 27). Рассматриваем равновесие узла, прикладывая к нему внешние силы (если таковые имеются) и усилия отброшенных стержней, направляя

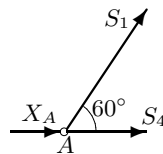


Рис. 25

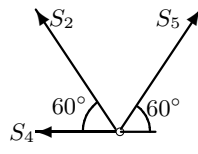


Рис. 26

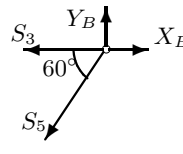


Рис. 27

векторы усилий по стержню из узла к стержню. Номера стержней указаны на рис. 24.

<sup>1)</sup> Не менее эффективно использовать Риттера или метод сечений [6].

Равновесие узла  $A$  (см. рис. 25):

$$\begin{aligned} X_A + S_1 \cos 60^\circ + S_4 &= 0, \\ S_1 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Равновесие узла  $D$  (см. рис. 26):

$$\begin{aligned} -S_2 \cos 60^\circ + S_5 \cos 60^\circ - S_4 &= 0, \\ S_2 \sin 60^\circ + S_5 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

Равновесие узла  $B$  (см. рис. 27):

$$\begin{aligned} X_B - S_3 - S_5 \cos 60^\circ &= 0, \\ Y_B - S_5 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Последовательно решаем системы (V.4), (V.5), (V.6). Получаем  $S_{1,1} = S_{1,2} = S_{1,4} = S_{1,5} = 0, S_{1,3} = -1$ . В обозначении для ответов  $S_{1,\mu}$  первый индекс указывает направление приложенной единичной силы. Индекс  $1$  соответствует горизонтальной единичной силе,  $2$  — вертикальной силе. Второй индекс — номер стержня.

2. К шарниру  $C$  прикладываем единичную вертикальную силу (рис. 28). Находим реакции опор от единичной силы. Составляем для этого уравнения равновесия фермы в целом (проекции на оси и сумма моментов относительно точки  $B$ ):

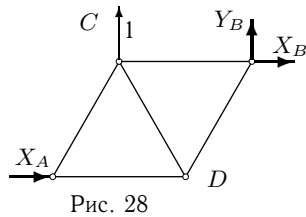


Рис. 28

$$\begin{aligned} X_A + X_B &= 0, \\ Y_B + 1 &= 0, \\ X_A l \sin 60^\circ - 1 \cdot l &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Пользуясь теми же уравнениями (V.4), (V.5), (V.6), но с реакциями опор вычисленными из (7), определяем усилия в стержнях:  $S_{2,1} = 0, S_{2,2} = 1,155, S_{2,3} = -0,577, S_{2,4} = S_{2,5} = -1,155$ .

3. По формуле Максвелла–Мора (V.2) находим коэффициенты податливости  $b_{ij}$ . Промежуточные результаты заносим в таблицу:

| $\mu$            | $S_{1,\mu}$ | $S_{2,\mu}$ | $l_\mu$ | $l_\mu S_{1,\mu}^2$ | $l_\mu S_{1,\mu} S_{2,\mu}$ | $l_\mu S_{2,\mu}^2$ |
|------------------|-------------|-------------|---------|---------------------|-----------------------------|---------------------|
| 1                | 0           | 0           | 1       | 0                   | 0                           | 0                   |
| 2                | 0           | 1,155       | 1       | 0                   | 0                           | 1,333               |
| 3                | -1          | -0,577      | 1       | 1                   | 0,577                       | 0,333               |
| 4                | 0           | -1,155      | 1       | 0                   | 0                           | 1,333               |
| 5                | 0           | -1,155      | 1       | 0                   | 0                           | 1,333               |
| $\sum_{\mu=1}^5$ |             |             |         | 1,000               | 0,577                       | 4,333               |

Суммируя три последних столбца, получаем три коэффициента податливости, отнесенные к жесткости  $EF$ :  $b_{11} = 1,000/(EF)$ ,  $b_{12} = b_{21} = 0,577/(EF)$ ,  $b_{22} = 4,333/(EF)$ , и записываем их в виде симметричной матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,00577 \\ 0,00577 & 0,04333 \end{bmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $B$ . Приравниваем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Решаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(b_{11} + b_{22}) + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

и находим собственные значения:

$$\lambda_1 = 0,044305, \lambda_2 = 0,009028.$$

5. Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты):

$$\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1} = 1,584 \text{ рад/с}, \quad \omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2} = 3,508 \text{ рад/с}.$$

## VI ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЧАСТОТЫ СИСТЕМЫ

### Условия задач

В задачах 6.1 – 6.30 механическая система с двумя степенями свободы состоит из связанных между собой цилиндров, грузов и двух линейно упругих пружин с одинаковой жесткостью  $c_1$  и  $c_2$ . Три элемента механизма наделены массами, кратными некоторой массе  $m$ . Трением пренебречь. Подвижные и неподвижные блоки считать однородными цилиндрами. Массой пружин пренебречь. Определить собственные и предельные частоты колебаний системы.

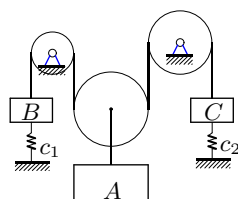
Под предельными частотами механической системы с двумя степенями свободы, состоящей из  $n$  тел с массами  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , будем понимать отличные от нуля пределы

$$\omega_{\infty k} = \lim_{m_k \rightarrow \infty} \omega_{1,2},$$

где  $\omega_{1,2}$  — первая или вторая собственная частота. Те массы, для которых существует предельная частота называются предельными<sup>1)</sup>.

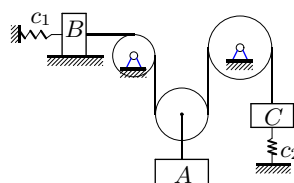
Ответы приведены в табл. ?? на с. ??.

#### 6.1



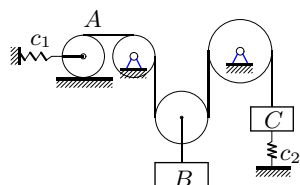
$m_B=3$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=3$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

#### 6.2

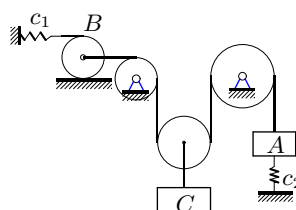


$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

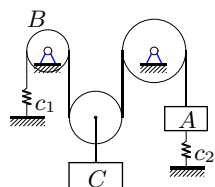
<sup>1)</sup> Существуют также маятниковые частоты для системы, содержащей гироскопические силы  $A\ddot{q} + g\Gamma\dot{q} + Kq = 0$ . Они получаются как предельные значения собственных частот при  $g \rightarrow \infty$ . См. [4], с. 193.

**6.3**

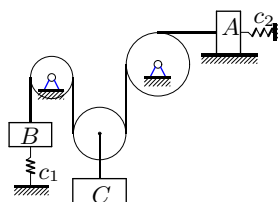
$m_A=4$  кг,  $m_B=3$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=4$  Н/м,  $c_2=1$  Н/м

**6.4**

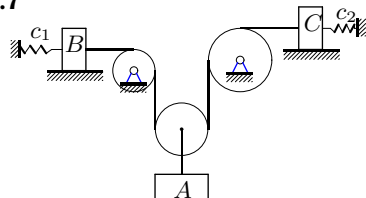
$m_B=4$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=3$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=3$  Н/м

**6.5**

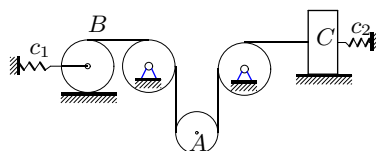
$m_B=6$  кг,  $m_C=5$  кг,  $m_A=4$  кг,  
 $c_2=8$  Н/м,  $c_1=3$  Н/м

**6.6**

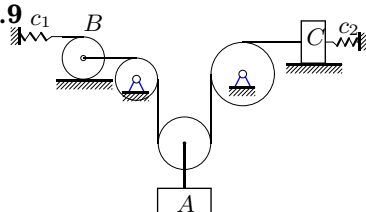
$m_B=2$  кг,  $m_C=2$  кг,  $m_A=4$  кг,  
 $c_1=1$  Н/м,  $c_2=4$  Н/м

**6.7**

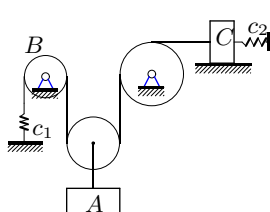
$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=3$  Н/м

**6.8**

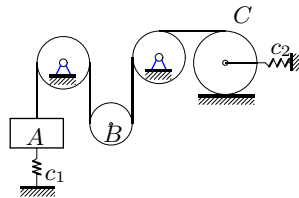
$m_B=4$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=5$  кг,  
 $c_1=3$  Н/м,  $c_2=4$  Н/м

**6.9**

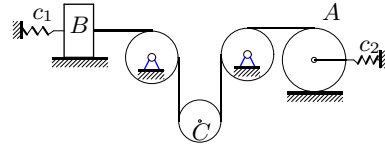
$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=7$  Н/м,  $c_1=3$  Н/м

**6.10**

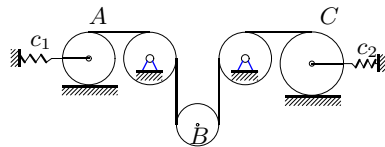
$m_B=6$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=8$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

**6.11**

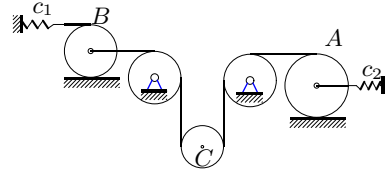
$m_A=3$  кг,  $m_B=5$  кг,  $m_C=8$  кг,  
 $c_2=4$  Н/м,  $c_1=5$  Н/м

**6.12**

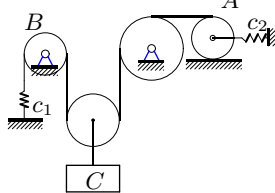
$m_B=5$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=6$  кг,  
 $c_1=3$  Н/м,  $c_2=6$  Н/м

**6.13**

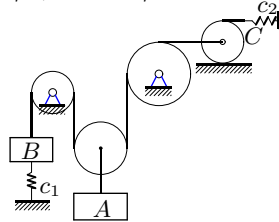
$m_A=7$  кг,  $m_B=5$  кг,  $m_C=8$  кг,  
 $c_2=6$  Н/м,  $c_1=4$  Н/м

**6.14**

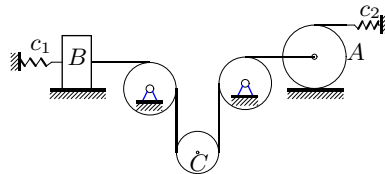
$m_B=5$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=6$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=6$  Н/м

**6.15**

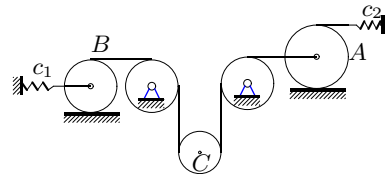
$m_B=3$  кг,  $m_C=2$  кг,  $m_A=4$  кг,  
 $c_1=6$  Н/м,  $c_2=5$  Н/м

**6.16**

$m_B=3$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=6$  кг,  
 $c_2=3$  Н/м,  $c_1=5$  Н/м

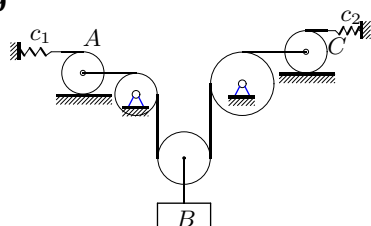
**6.17**

$m_B=7$  кг,  $m_C=5$  кг,  $m_A=8$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=7$  Н/м

**6.18**

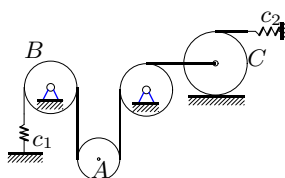
$m_B=5$  кг,  $m_C=3$  кг,  $m_A=6$  кг,  
 $c_1=4$  Н/м,  $c_2=7$  Н/м

6.19



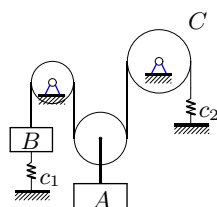
$m_A=3$  кг,  $m_B=2$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=4$  Н/м

6.20



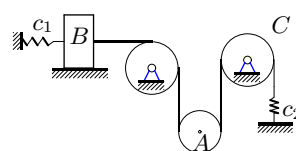
$m_B=5$  кг,  $m_A=3$  кг,  $m_C=6$  кг,  
 $c_1=6$  Н/м,  $c_2=5$  Н/м

6.21



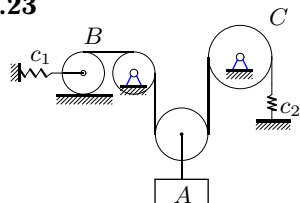
$m_B=3$  кг,  $m_A=5$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=4$  Н/м,  $c_1=7$  Н/м

6.22



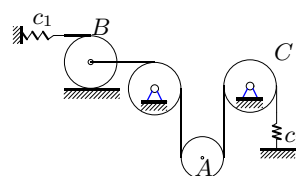
$m_B=4$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=5$  кг,  
 $c_1=2$  Н/м,  $c_2=8$  Н/м

6.23



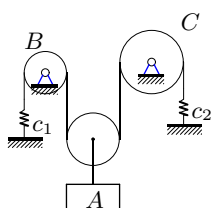
$m_B=5$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=6$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=7$  Н/м

6.24



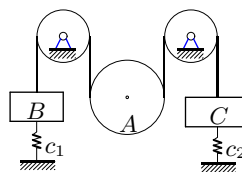
$m_B=6$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=7$  кг,  
 $c_2=6$  Н/м,  $c_1=8$  Н/м

6.25



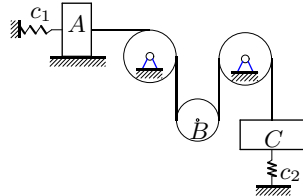
$m_B=3$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=6$  Н/м

6.26



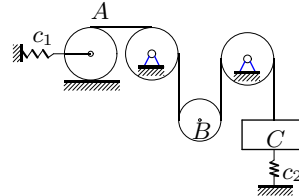
$m_B=3$  кг,  $m_A=4$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=3$  Н/м,  $c_1=4$  Н/м

6.27



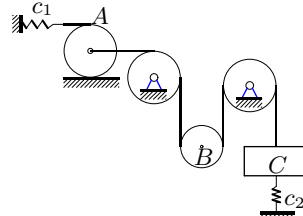
$m_A=4$  кг,  $m_B=2$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=3$  Н/м,  $c_2=2$  Н/м

6.28



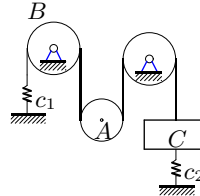
$m_A=6$  кг,  $m_B=4$  кг,  $m_C=4$  кг,  
 $c_2=5$  Н/м,  $c_1=2$  Н/м

6.29



$m_A=4$  кг,  $m_B=2$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=4$  Н/м,  $c_2=2$  Н/м

6.30



$m_B=4$  кг,  $m_A=2$  кг,  $m_C=3$  кг,  
 $c_1=5$  Н/м,  $c_2=2$  Н/м

### Пример решения

**Задача.** Механическая система состоит из однородных цилиндров 1, 2, масса которых  $m_1 = 3$  кг,  $m_2 = 8$  кг и бруска массой  $m_3 = 2$  кг (рис. 29). Цилиндр 2 катится без проскальзывания по бруску.

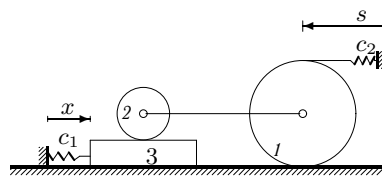


Рис. 29

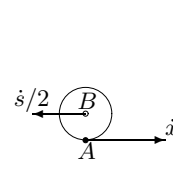


Рис. 30

Брусок скользит без сопротивления по плоскости. Жесткости  $c_1$ ,  $c_2$  пружин одинаковы и равны  $c = 1$  Н/м. Найти собственные и предельные частоты системы.

**Решение**

Выбираем обобщенные координаты. Пусть  $s$  — удлинение одной пружины,  $x$  — удлинение другой (перемещение бруска 3).

Вычисляем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости  $\dot{x}$  и  $\dot{s}$ . Кинетическая энергия поступательного движения бруска  $T = m_3 \dot{x}^2 / 2$ . Однородный цилиндр 1, катящийся по поверхности, имеет энергию (см. (I.6) на с. 33)

$$T = \frac{3}{4} m_1 v_1^2,$$

где скорость центра цилиндра вдвое меньше скорости верхней точки его обода (см. рис. 2 на с. 31)  $v_1 = \dot{s}/2$ . Кинетическая энергия плоского движения цилиндра 2

$$T = \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_2^2,$$

где скорость центра цилиндра 2 в силу жесткости соединительного стержня равна скорости центра цилиндра 1 и  $v_2 = v_1 = \dot{s}/2$ . Момент инерции цилиндра  $J_0 = m_2 R^2 / 2$ . Угловую скорость  $\omega_2$  найдем, связав скорость точки A обода цилиндра 2 и скорость его центра B (рис. 30) графом  $A \xrightarrow[\pi/2]{} B$ . Из уравнения графа для скоростей в проекции на горизонталь имеем  $v_{Bx} = v_{Ax} - R\omega_2 \sin(\pi/2)$  или  $-\dot{s}/2 = \dot{x} - R\omega_2$  откуда  $\omega_2 = (\dot{s}/2 + \dot{x})/R$ . Таким образом кинетическую энергию системы запишем в виде

$$T = \frac{3}{4} m_1 \left( \frac{\dot{s}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{\dot{s}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} m_2 R^2 \left( \frac{\dot{s}/2 + \dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2.$$

Потенциальная энергия пружин имеет выражение

$$\Pi = cs^2/2 + cx^2/2.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial s}.$$

Подставляем в уравнения выражения кинетической и потенциальной энергии

$$a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{s} = -cx,$$

$$a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{s} = -cs,$$

где  $a_{11} = m_2/2 + m_3$ ,  $a_{12} = a_{21} = m_2/4$ ,  $a_{22} = 3/8(m_1 + m_2)$ .

Делая подстановку  $x = A \sin \omega t$ ,  $s = B \sin \omega t$ , что равносильно формальной замене  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ,  $\ddot{s} = -\omega^2 s$ , из условия равенства нулю определителя системы для коэффициентов  $A$  и  $B$

$$\begin{vmatrix} c - \omega^2 a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & c - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix}$$

получаем частотное уравнение

$$\omega^4(3m_3m_1 + 3m_3m_2 + m_2^2 + 1.5m_1m_2) - \omega^2(3m_1 + 7m_2 + 8m_3) + 8 = 0.$$

Решая уравнение, находим квадраты собственных частот  $\omega_{1,2}^2 =$

$$= \frac{3m_1 + 7m_2 + 8m_3 \pm \sqrt{9m_1^2 + 17m_2^2 + 64m_3^2 + 16m_3m_2 - 6m_2m_1 - 48m_3m_1}}{6m_3m_1 + 6m_3m_2 + 2m_2^2 + 3m_1m_2},$$

где  $\omega_1$  — большая частота (взят знак +),  $\omega_2$  — меньшая.

Находим предельные частоты:

$$\omega_{\infty 1,1} = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \omega_1 = \sqrt{\frac{2}{m_2 + 2m_3}},$$

$$\omega_{\infty 3,1} = \lim_{m_3 \rightarrow \infty} \omega_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{6}{m_1 + m_2}}.$$

Все остальные пределы не дают предельных частот:

$$\omega_{\infty 2,1} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \omega_1 = 0,$$

$$\omega_{\infty 1,2} = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \omega_2 = \omega_{\infty 2,2} = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \omega_2 = \omega_{\infty 3,2} = \lim_{m_3 \rightarrow \infty} \omega_2 = 0.$$

Подставляя числовые значения, получаем собственные  $\omega_1 = 0,592 \frac{1}{c}$ ,  $\omega_2 = 0,371 \frac{1}{c}$  и предельные частоты  $\omega_{\infty 1,1} = 0,408 \frac{1}{c}$ ,  $\omega_{\infty 3,1} = 0,492 \frac{1}{c}$ .

Предельными в данной системе будут массы 1 и 3. Если увеличить поочередно каждую из этих масс до бесконечности, что фактически соответствует наложению связей на соответствующие тела, то система будет иметь одну степень свободы и будет совершать колебания. Наложение связей на тело 2 приводит к полной остановке механизма. Масса 2 не является предельной. Таким образом предельный анализ собственных частот системы позволяет качественно оценить вклад каждого тела в колебательное движение системы.

## VII СТАБИЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

### Условия задач

*В задачах 7.1-7.30 дано дифференциальное уравнение движения некоторой механической системы с обобщенной координатой  $x$ . При заданной обобщенной скорости  $\dot{x}$  определить значение обобщенной координаты  $x$  для условия неустойчивости заданного порядка  $\gamma$ .*

Ответы даны в табл. ?? на с. ??.

- |              |                                          |                  |
|--------------|------------------------------------------|------------------|
| <b>7.1.</b>  | $a\ddot{x}x + b\dot{x} + x^2 = 0,$       | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.2.</b>  | $a\ddot{x}x + b\dot{x} + x^2 = 0,$       | $\gamma=(1/2).$  |
| <b>7.3.</b>  | $a\ddot{x}x + b\dot{x}^2 + x^2 = 0,$     | $\gamma=(1/2) .$ |
| <b>7.4.</b>  | $a\ddot{x}x + b\dot{x}^2 + x^2 = 0,$     | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.5.</b>  | $a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + x = 0,$        | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.6.</b>  | $a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + x = 0,$        | $\gamma=(2/3).$  |
| <b>7.7.</b>  | $a\ddot{x} + b\dot{x} + x^2 = 0,$        | $\gamma=(2/3).$  |
| <b>7.8.</b>  | $a\ddot{x} + b\dot{x} + x^2 = 0,$        | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.9.</b>  | $a\ddot{x}\dot{x} + b\dot{x} + x = 0,$   | $\gamma=(1/3).$  |
| <b>7.10.</b> | $a\ddot{x}\dot{x} + b\dot{x} + x = 0,$   | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.11.</b> | $a\ddot{x}\dot{x} + bx^2 + x = 0,$       | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.12.</b> | $a\ddot{x}\dot{x} + bx^2 + x = 0,$       | $\gamma=(1/2).$  |
| <b>7.13.</b> | $a\ddot{x} + b\dot{x} + \sqrt{x} = 0,$   | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.14.</b> | $a\ddot{x} + b\dot{x} + \sqrt{x} = 0,$   | $\gamma=(1/3).$  |
| <b>7.15.</b> | $a\ddot{x} + b\sqrt{x} + x = 0,$         | $\gamma=(0/3).$  |
| <b>7.16.</b> | $a\ddot{x} + b\sqrt{x} + x = 0,$         | $\gamma=(2/3).$  |
| <b>7.17.</b> | $a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + x\dot{x} = 0,$ | $\gamma=(0/2).$  |
| <b>7.18.</b> | $a\ddot{x} + b\dot{x}^2 + x\dot{x} = 0,$ | $\gamma=(1/3).$  |

- 7.19.**  $a\ddot{x} + bx + x\dot{x} = 0, \quad \gamma=(0/3).$   
**7.20.**  $a\ddot{x} + bx + x\dot{x} = 0, \quad \gamma=(2/3).$   
**7.21.**  $a\ddot{x}x + bx^2 + 1 = 0, \quad \gamma=(1/2).$   
**7.22.**  $a\ddot{x} + bx\dot{x} + 1 = 0, \quad \gamma=(2/3).$   
**7.23.**  $a\ddot{x} + bx\dot{x} + 1 = 0, \quad \gamma=(1/3).$   
**7.24.**  $a\ddot{x} + bx\dot{x} + 1 = 0, \quad \gamma=(0/3).$   
**7.25.**  $a\ddot{x}x - b\dot{x}x - 1 = 0, \quad \gamma=(0/3).$   
**7.26.**  $a\ddot{x}x + bx^2 + 1 = 0, \quad \gamma=(2/3).$   
**7.27.**  $a\ddot{x}\dot{x} + bx\dot{x} + 1 = 0, \quad \gamma=(1/3).$   
**7.28.**  $a\ddot{x}^2 + bx + 1 = 0, \quad \gamma=(1/2).$   
**7.29.**  $a\ddot{x}^2 + b\dot{x} + cx = 0, \quad \gamma=(1/2).$   
**7.30.**  $a\ddot{x}^2 + b\dot{x} + cx = 0, \quad \gamma=(0/3).$

### Пример решения

**Задача.** Для дифференциального уравнения

$$a\ddot{x}\dot{x} + bx\dot{x} + 1 = 0, \quad (\text{VII.1})$$

описывающего движение некоторой механической системы, найти условие неустойчивости порядка  $(2/3)$ , выразив соответствующее значение обобщенной координаты  $x$  как функцию обобщенной скорости  $\dot{x}$ , считая ее заданной.

### Решение

Проварьируем (VII.1)

$$a\dot{x}\Delta\ddot{x} + (a\ddot{x} + bx)\Delta\dot{x} + b\dot{x}\Delta x = 0. \quad (\text{VII.2})$$

Для того, чтобы проанализировать влияние третьей производной обобщенной координаты  $\Delta x^{(3)}$ , необходимо иметь уравнение, содержащее эту величину. Продифференцируем (VII.2)

$$a\dot{x}\Delta x^{(3)} + (2a\ddot{x} + bx)\Delta\ddot{x} + (a\dot{x}^{(3)} + 2b\dot{x})\Delta\dot{x} + b\ddot{x}\Delta x = 0. \quad (\text{VII.3})$$

Уравнение (VII.3) можно получить иначе. Используя перестановочность операций варьирования и дифференцирования, можно сначала продифференцировать VII.1

$$ax^{(3)}\dot{x} + b\dot{x}^2 + a\ddot{x}^2 + bx\ddot{x} = 0, \quad (\text{VII.4})$$

а затем проварьировать это уравнение. Результат будет тот же — уравнение (VII.3). Запишем (VII.2), (VII.3) в виде системы относительно  $\Delta x$ ,  $\Delta \dot{x}$ , считая заданными вариации  $\Delta \ddot{x}$  и  $\Delta x^{(3)}$

$$\begin{bmatrix} b\dot{x} & a\ddot{x} + bx \\ b\ddot{x} & ax^{(3)} + 2b\dot{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a\dot{x}\Delta \ddot{x} \\ a\dot{x}\Delta x^{(3)} + (2a\ddot{x} + bx)\Delta \ddot{x} \end{bmatrix}$$

Какими бы малыми не были значения заданных кинематических возмущений  $\Delta \ddot{x}$  и  $\Delta x^{(3)}$ , при стремлении определителя системы к нулю отклонения  $\Delta x$  и  $\Delta \dot{x}$  будут неограниченно расти. Это явление называется неустойчивостью системы по отношению к  $\Delta \ddot{x}$  и  $\Delta x^{(3)}$ . Условие равенства нулю определителя дает соответствующее условие неустойчивости порядка (2/3):

$$\det \begin{bmatrix} \dot{x} & a\ddot{x} + bx \\ \ddot{x} & ax^{(3)} + 2b\dot{x} \end{bmatrix} = ax^{(3)}\dot{x} + 2b\dot{x}^2 - a\ddot{x}^2 - bx\ddot{x} = 0. \quad (\text{VII.5})$$

Так как предполагается, что дифференциальное уравнение VII.1 при определенных начальных значениях имеет решение  $x(t)$ , и следовательно можно найти функции  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ ,  $x^{(3)}(t)$  последнее уравнение является алгебраическим для времени  $t$ . Решить его в общем случае и найти критическое в отношении неустойчивости время крайне затруднительно во-первых потому, что явное выражение функции (решение нелинейного уравнения) найти можно в исключительно редких случаях, а во-вторых, даже имея эту функцию алгебраическое уравнение для  $t$  опять-таки является сложным. В практических случаях необходимо использовать численные методы. Однако в упрощенной постановке, когда в условии задачи явно указана расчетная скорость системы, задача решается не относительно времени, а относительно обобщенной координаты, что существенно проще, но не менее практически важно. Действительно, если механизм должен работать с заданной скоростью, то найденная координата  $x$  укажет где механизм неустойчив по отношению к возмущению заданного вида.

Исключая из системы (VII.1), (VII.4) и (VII.5) третью производную  $x^{(3)}$  и ускорение  $\ddot{x}$ , найдем значение обобщенной координаты, соответствующей неустойчивости порядка (2/3) как функцию обобщенной скорости

$$x = (ab\dot{x}^4 - 2)/(2b\dot{x}).$$

В тех случаях, когда в выражение определителя не входит величина  $x^{(3)}$ , для получения результата уравнение (VII.4) не потребуется.

### Библиографический список

1. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. — М.: Наука, 1984.
2. *Бутенин Н.В., Луңц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 1998.
3. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. — М.: Физматлит, 2001.
5. *Зими́на О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А.* Решебник. Высшая математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
6. *Кирсанов М.Н.* Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А. И. Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990.
8. *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1986.
9. *Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.* Теоретическая механика. Динамика. — Киев: Выща шк., 1990.
10. *Розенблат Г.М.* Механика в задачах и решениях. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 160 с.
11. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А.Яблонского.— 3-е изд. — М.:Высшая школа, 1972.
12. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1998.
13. *Яблонский А.А., Норейко С.С.* Курс теории колебаний. — М.: Высшая школа, 1975.