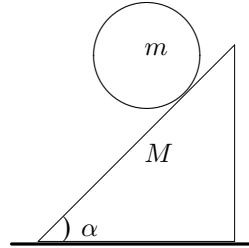


К решению олимпиадной задачи (МАДИ 2003)

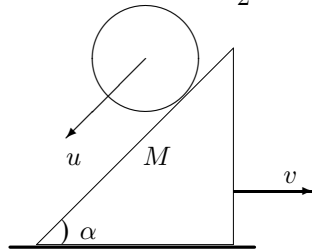
Сплошной однородный круговой цилиндр массой m скатывается по боковой поверхности призмы массой M . Призма может скользить без трения по горизонтальной поверхности. Движение начинается из состояния покоя. Сопротивлением качению пренебречь. При каком коэффициенте трения между цилиндром и призмой качение будет без проскальзывания?



Решение.

Кинетическая энергия системы

$$T := \frac{M v^2}{2} + \frac{m u^2}{4} + \frac{1}{2} m ((v - u \cos \alpha)^2 + u^2 \sin^2 \alpha)$$



или

$$T := \frac{M v^2}{2} + \frac{3 m u^2}{4} + \frac{m v^2}{2} - m v u \cos \alpha$$

Система уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{3 m \dot{u}}{2} - m \dot{v} \cos \alpha = m g \sin \alpha$$

$$M \dot{v} + m \dot{v} - m \dot{u} \cos \alpha = 0.$$

Решаем систему

$$\dot{v} = -\frac{2 m \cos \alpha g \sin \alpha}{-3 M - 3 m + 2 m \cos^2 \alpha}$$

$$\dot{u} = \dot{v}(m + M)/(m \cos \alpha)$$

Сила трения входит в дифференциальное уравнение плоского движения цилиндра

$$R F = J \dot{u} / R,$$

где $J = m R^2 / 2$, и

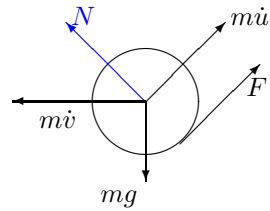
$$F = -\frac{m g \sin \alpha (M + m)}{-3 M - 3 m + 2 m \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

В предельном случае F удовлетворяет закону Кулона

$$F = f N$$

Нормальную реакцию N можно выразить из равновесия цилиндра по Даламберу на нормаль к плоскости качения

$$N = mg \cos \alpha - m\dot{v} \sin \alpha$$



или

$$N = mg \cos \alpha + \frac{2m^2 \cos \alpha g \sin^2 \alpha}{-3M - 3m + 2m \cos^2 \alpha} \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$f > \frac{\sin \alpha (M + m)}{\cos \alpha (3M + m)}$$