Задача. Механическая система (рис. 1) состоит из груза A массой m_A, двух невесомых блоков и однородных цилиндров с массами m_B и m_C. Система находится в вертикальной плоскости и приводится в движение силами тяжести груза A и цилиндра B. Найти ускорение груза A.

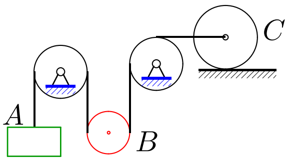

Рис. 1

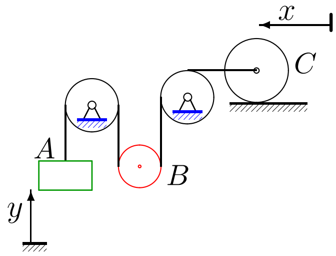

Рис. 2

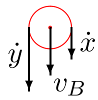

Рис. 3

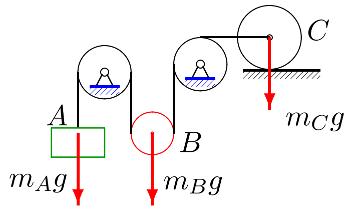

Рис. 4

Решение

1. Выбираем две независимые переменные $q_1 = x$ и $q_2 = y$, однозначно описывающие положение системы. Пусть переменная x указывает положение груза A по отношению к неподвижной системе отсчета, а y — положение центра цилиндра C относительно той же неподвижной системы отсчета (рис. 2).

2. Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий груза и цилиндров: $T = T_A + T_B + T_C$.

Кинетическая энергия груза

$$T_A = \frac{m_A \dot{y}^2}{2}.$$

Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение:

$$T_B = \frac{m_B v_B^2}{2} + \frac{J\omega_B^2}{2}, \tag{1}$$

где v_B — скорость центра цилиндра. Очевидно, (рис. 3) $v_B = (\dot{x} + \dot{y})/2$. Угловая скорость ω_B зависит от разности скоростей $\dot{x}$ и $\dot{y}$ (рис. 3)

$$\omega_B = |\dot{x} - \dot{y}|/(2R).$$

Подставляем в (1) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси, $J = m_B R^2/2$. В результате получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_B = \frac{m_B}{2}\left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{2}\right)^2 + \frac{m_B}{4}\left(\frac{\dot{x} - \dot{y}}{2}\right)^2.$$

Кинетическая энергия однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания по поверхности

$$T_C = \frac{3m_C \dot{x}^2}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \dot{x}^2(3m_C/4 + 3m_B/16) + m_B\dot{x}\dot{y}/8 + \dot{y}^2(m_A/2 + 3m_B/16).$$

3. Обобщенную силу Q_x вычисляем по формуле $Q_x = \delta A_x/\delta x$, где δA_x — элементарная работа всех сил на перемещении δx. При вычислении элементарной работы δA_x на приращении обобщенной координаты x фиксируется другая обобщенная координата, т.е. $\delta y = 0$. Очевидно, что на таком перемещении работу совершат только сила тяжести $m_B g$. Так как левый блок неподвижен, и МЦС цилиндра B находится в точке K (рис. 5), перемещение центра цилиндра равно $\delta x/2$. Отсюда $\delta A_x = m_B g \delta x/2$ и $Q_x = m_B g/2$. Аналогично, $Q_y = m_B g/2 - m_A g$ (рис. 6).

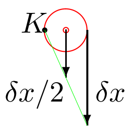

Рис. 5

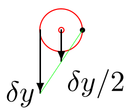

Рис. 6

4. Записываем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_y,$$

и вычисляем входящие в них производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\dot{x}(3m_C/2+3m_B/8)+m_B\dot{y}/8,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\ddot{x}(3m_C/2+3m_B/8)+m_B\ddot{y}/8,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m_B\dot{x}/8+\dot{y}(m_A+3m_B/8),\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=m_B\ddot{x}/8+\ddot{y}(m_A+3m_B/8),$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=0.$$

В результате уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(3m_C/2+3m_B/8)+m_B\ddot{y}/8=m_Bg/2,\\&m_B\ddot{x}/8+\ddot{y}(m_A+3m_B/8)=m_Bg/2-m_Ag.\end{aligned}\tag{2}$$

Решая линейную (относительно $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$) систему уравнений (2), находим ускорение груза A.