Теория удара

1 Определения

Явление, при котором скорости точек тела за малый промежуток времени меняются на конечную величину, называется ударом. Ударный импульс

$$\vec{S}_{\text{уд}} = \int\limits_0 \vec{F}_{\text{уд}} dt = \vec{F}^{\text{ср}}_{\text{уд}} \tau \tag{1}$$

отличается от импульса неударных сил тем, что время удара τ мало, ударные силы $F_{\text{уд}}$ велики, а $S_{\text{уд}}$ принимает конечное значение. Поэтому изучая удар будем пренебрегать

- неударными силами по сравнению с ударными,
- перемещениями точек тела во время удара.

Теорема об изменении количества движения в случае удара имеет вид

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}^e_k \tag{2}$$

Интегрируя теорему об изменении момента (относительно точки A) количества движения

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_k \vec{m}_A(\vec{F}_k),$$

в случае удара, получим с учетом (1)

$$\vec{L}^1_A - \vec{L}^0_A = \sum \vec{m}_A(\vec{S}^e_k) \tag{3}$$

2 Удар материальной точки о поверхность

С некоторой высоты H точка массой m падает на поверхность и отскакивает на высоту h (рис. 1).

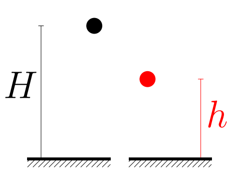

Рис. 1

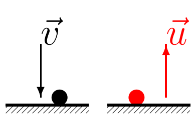

Рис. 2

Скорость точки при ударе о поверность v, при отскоке от поверхности u (рис. 2). Очевидно, $u < v$. Отношение скоростей

$$k = \frac{u}{v}$$

называют коэффициентом восстановления при ударе. Его можно найти экспериментально. Согласно формуле Галилея, $v = \sqrt{2gH}$, $u = \sqrt{2gh}$. Отсюда $k = \sqrt{h/H}$. Коэффициент восстановления меняется в пределах $0 \le k \le 1$.

3 Косой удар

Решим задачу. Материальная точка падает со скоростью v на гладкую плоскость под углом α. Под каким углом β (рис. 3) отскочет точка от поверхности, если коэффициент восстановления равен k?

Для решения задачи запишем закон изменения количества движения точки в проекции на плоскость (ось x). Так как плоскость гладкая, горизонтальных сил и их импульсов нет. Закон изменения здесь имеет форму закона сохранения

$$mu_x - mv_x = 0 \tag{4}$$

Так как $u_x = u \sin\beta$, $v_x = v \sin\alpha$, то

$$u \sin\beta = v \sin\alpha \tag{5}$$

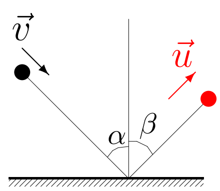

Рис. 3

Модули нормальных проекций скоростей связаны коэффициентом восстановления

$$k = \frac{u \cos\beta}{v \cos\alpha} \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$\operatorname{tg}\beta = (1/k)\operatorname{tg}\alpha \tag{7}$$

При $k = 0$ получим $\beta = \pi/2$, т.е. точка покатится по поверхности (мяч, брошенный в песок).

4 Центр удара

Твердое тело массой M вращается на оси, закрепленной на в подшипниках A и B. Подшипник A имеет подпятник, создающий реакцию, направленную вдоль оси. Определим, чему равны импульсивные реакции A и B при ударе. Выберем оси координат так, что центр масс C тела находился в плоскости Ayz. При ударе возникнет пять импульсивных реакций: три в опоре A и две в опоре B (рис. 4).

Обозначим: a — расстояние центра масс от оси, $AB = b$ — расстояние между подшипниками, ω — угловая скорость тела до удара, Ω — угловая скорость после удара.

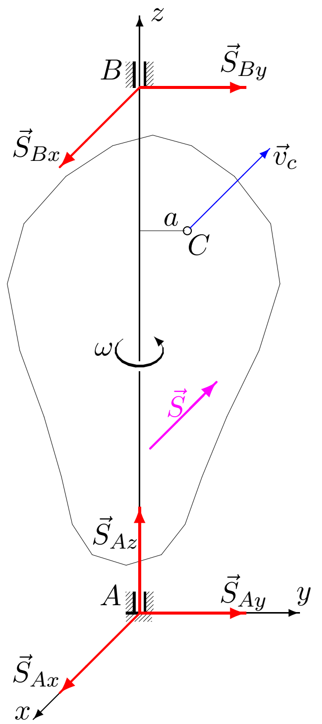

Рис. 4

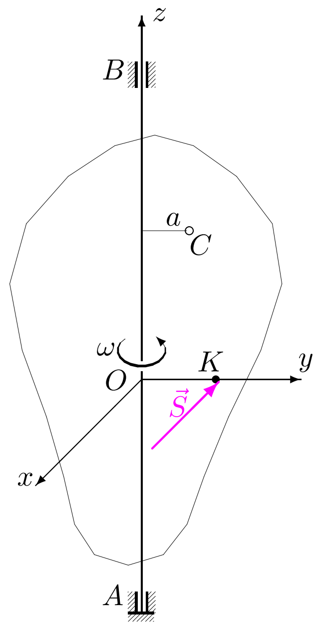

Рис. 5

Запишем уравнения (2), (3) в проекциях на оси координат. Так как проекции кинетического момента имеют вид $L_x = -J_{xz}\omega$, $L_y = -J_{yz}\omega$, $L_z = J_z\omega$, то получим

$$-Ma(\Omega - \omega) = S_{Ax} + S_{Bx} + S_x, \tag{8}$$

$$0 = S_{Ay} + S_{By} + S_y, \tag{9}$$

$$0 = S_{Az} + S_z, \tag{10}$$

$$-J_{xz}(\Omega - \omega) = -S_{By}b + m_x(\vec{S}), \tag{11}$$

$$-J_{yz}(\Omega - \omega) = S_{Bx}b + m_y(\vec{S}). \tag{12}$$

$$J_z(\Omega - \omega) = m_z(\vec{S}). \tag{13}$$

Составление правых частей (8–13) аналогично составлению уравнений равновесия пространственной статики, только вместо сил здесь берутся их импульсы. Шесть неизвестных системы (8–13): S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By} и разность угловых скоростей $(\Omega - \omega)$.

Найдем условия, при которых не возникают импульсные (ударные) реакции шарниров. Известно, что в механических устройствах ударные реакции способствуют износу и могут привести к разрушению.

Положим в (8–13): $\vec{S}_A = 0$, $\vec{S}_B = 0$. Из (9) и (10) сразу же получим, что вектор внешнего ударного импульса $\vec{S}$ должен лежать в плоскости, параллельной xAy: $S_y = 0$, $S_z = 0$. Заметим, что при $\vec{S}_A = 0$, $\vec{S}_B = 0$ вид системы (8–13) не зависит от выбора начала координат. Перенесем начало координат по оси z так, чтобы импульс $\vec{S}$ лежал в плоскости xOy (рис. 5). Так как $m_x(\vec{S}) = 0$, $m_y(\vec{S}) = 0$, то из (11) и (12) следует, что центробежные моменты инерции тела относительно новых осей равны нулю: $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$. Это возможно для тел, обладающих плоскостью симметрии xOy. Из (8) при $S_x = -S$ следует

$$Ma(\Omega - \omega) = S,$$

а из (13) имеем

$$J_z(\Omega - \omega) = Sh,$$

где обозначено $h = OK$. Из последних двух уравнений сразу же получим

$$h = \frac{J_z}{Ma}.$$

На таком расстоянии от оси вращения должен быть приложен ударный импульс, не вызывающий ударных реакций.