Глава 7

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Значения реакций опор конструкции или усилие к каком-либо ее элементе зависят от места приложения нагрузки и ее величины. Исследование этой зависимости необходимо для анализа работы конструкции при различных вариантах нагрузок. Линия влияния — это зависимость некоторой исследуемой величины от места приложения единичной нагрузки.

7.1. Ферма

Ферма — шарнирно-стержневая конструкция, загруженная в узлах (шарнирах). Ферма является упрощенной моделью реальной системы, в которой стержни могут иметь вес, соединяться жестко, а не только шарнирно, и нагрузка может быть произвольной. Однако выбранная модель достаточно точно описывает большинство практических схем и широко используется в инженерных расчетах.

Будем предполагать, что стержни фермы и нагрузки располагаются в одной плоскости.

Нагрузку делим на постоянную и временную. Постоянная нагрузка — равномерно распределенная по всей длине фермы нагрузка, вызванная весом конструкции. Временная нагрузка — равномерно распределенная на определенных участках нагрузка от действия внешних факторов.

Постановка задачи. *Найти максимальное и минимальное усилие в стержнях фермы от действия постоянной* $q_{\text{п}}$ *и временной* $q_{\text{вр}}$ *нагрузки, равномерно распределенной по нижнему или верхнему поясу.*

План решения

1. Строим линии влияния опор фермы $Y_A(x)$, $Y_B(x)$, где x — горизонтальная координата положения единичной вертикальной силы, приложенной к нижнему или верхнему поясу.

2. Выражаем усилия S_k в заданном k-м стержне через $Y_A(x)$, $Y_B(x)$ пользуясь методом Риттера и/или вырезания узлов [10]. Строим график функции $S_k(x)$ — линию влияния усилия S_k.

3. Вычисляем усилие от действия постоянной нагрузки $q_{\text{п}}$, равномерно распределенной по *всему* нижнему или верхнему поясу по формуле $S_k^{\text{п}} = \omega q_{\text{п}}$, где ω — площадь линии, ограниченной линией влияния $S_k(x)$ усилия в заданном стержне.

4. Вычисляем максимальное значение $S_{k\ \max}^{\text{вр}}$ усилия от действия временной нагрузки. Прикладываем равномерно распределенную нагрузку $q_{\text{вр}}$ к той части нижнего или верхнего пояса, где ординаты линии влияния $S_k(x)$ положительные. По формуле $S_{k\ \max}^{\text{вр}} = \omega^+ q_{\text{вр}}$, где ω^+ — площадь линии, ограниченной линией влияния $S_k(x)$ выше оси абсцисс.

5. Вычисляем минимальное значение $S_{k\ \min}^{\text{вр}}$ усилия от действия временной нагрузки. Прикладываем распределенную нагрузку $q_{\text{вр}}$ к той части нижнего или верхнего пояса, где ординаты линии влияния $S_k(x)$ отрицательные. По формуле $S_{k\ \min}^{\text{вр}} = \omega^- q_{\text{вр}}$, где ω^- — площадь линии, ограниченной линией влияния $S_k(x)$ ниже оси абсцисс.

6. Вычисляем экстремальные значения усилия от совместного действия временной и постоянной нагрузки:

$$S_{k\ \max} = S_k^{\text{п}} + S_{k\ \max}^{\text{вр}}, \quad S_{k\ \min} = S_k^{\text{п}} + S_{k\ \min}^{\text{вр}}$$

Пример 1 (простая решетка). Найти максимальное и минимальное усилие в стержнях 3-4, 4-5, 3-8, 2-8 фермы от действия постоянной $q_{\text{п}} = 6$ кН/м, и временной $q_{\text{вр}} = 16$ кН/м, нагрузки, равномерно распределенной по нижнему поясу (рис. 92). Дано: $a = 1$ м, $h = 1$ м.

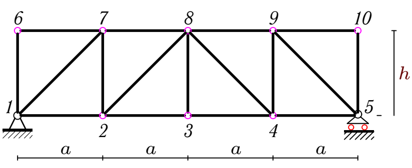

Рис. 92

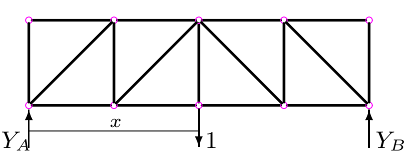

Рис. 93

1. Строим линии влияния опор фермы $Y_A(x)$, $Y_B(x)$, где x — горизонтальная координата положения единичной вертикальной силы, приложенной к нижнему поясу.

В некоторой точке нижнего пояса с координатой x размещаем единичную силу (рис. 93). Составляем уравнения равновесия конструкции в форме уравнений моментов относительно опор

$$Y_A \cdot 4a - 1 \cdot (4a - x) = 0, \quad -Y_B \cdot 4a + 1 \cdot x = 0$$

и находим $Y_A(x) = 1 - x/(4a)$, $Y_B(x) = x/(4a)$. Строим графики полученных функций — линии влияния (рис. 96).

2. Выражаем усилия S_{3-4} в стержне 3-4 через $Y_A(x)$, $Y_B(x)$. Усилие S_{3-4} можно найти методом Риттера, так как этот стержень входит в

сечение Риттера, пересекающее три стержня и разделяющее ферму на две части (рис. 94)

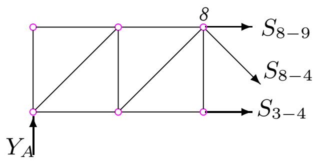

Рис. 94

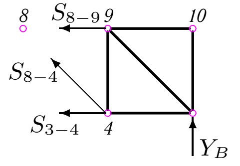

Рис. 95

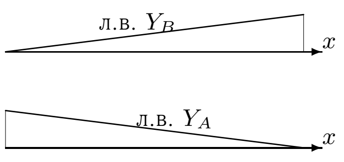

Рис. 96

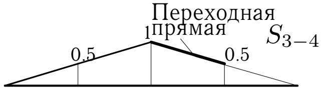

Рис. 97

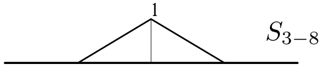

Рис. 98

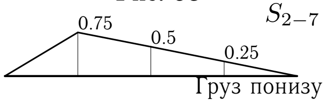

Рис. 99

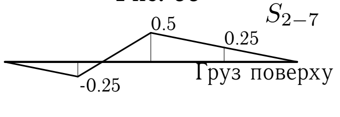

Рис. 100

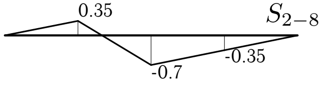

Рис. 101

Предполагая, что единичный груз находится *справа* от сечения $3a \leqslant x \leqslant 4a$, т.е. в пределах лишь одной последней панели. Рассматриваем *левую* часть фермы, не содержащую груз. Составляем сумму моментнов относительно точки Риттера стержня, т.е. точки, в которой пересекаются линии двух других стержней данного сечения. Такой точкой для стержня 3-4 является шарнир 8:

$$\sum M_8 = S_{3-4} \cdot h - Y_A \cdot 2a = 0.$$

Область определения решения этого уравнения $S_{3-4}(x) = Y_A \cdot 2a/h$ задана оговоренным положением груза: $3a \leqslant x \leqslant 4a$. Строим в этом промежутке график $S_{3-4}(x) = 2Y_A(x)$, масштабируя график $Y_A(x)$ в два раза (с учетом того, что по условию $a = h = 1$ м) (рис. 97). Чтобы достроить линию влияния в другой области изменения x предположим, что груз находится в некоторой точке *слева* от сечения т.е. $0 \leqslant x \leqslant 2a$. Рассмотрим равновесие *правой* части фермы. Точка Риттера для стержня остается той же — шарнир 8. Составляем сумму моментов

$$-S_{3-4} \cdot h + Y_B \cdot 2a = 0$$

и получаем $S_{3-4}(x) = 2Y_B(x)$. Участок $2a \leqslant x \leqslant 3a$ не попал ни в левую, ни в правую ветвь линии влияния. Однако в крайних его точках ординаты известны. Пользуясь свойством линейности задачи, соединяем эти точки так называемой переходной прямой.

Линия влияния, составленная из двух построенных ветвей графика $S_{3-4}(x)$ и переходной прямой образуют линию влияния усилия S_{3-4}, означающую зависимость этого усилия от места положения единичной нагрузки (рис. 97).

Строим линию влияния усилия в стойке 3-8 при движении единичного груза понизу. Для этой стойки не существует сечения Риттера. Сечение, рассекающее ферму и проходящее через этот стержень пересекает как минимум четыре стержня. Поэтому используем метод вырезания узлов. Здесь существует только две возможности для положения единичной нагрузки. Либо нагрузка находится в узле, либо нет. Если единичная нагрузка находится в узле, то вырезая узел (рис. 102) и составляя уравнение проекции на вертикальную ось, сразу же получаем $S_{3-8} = 1$. Если нагрузки в узле нет и он незагружен, то очевидно (например, из леммы о нулевых стержнях) усилие в нем равно нулю. Получаем линию влияния характерной для стоек треугольной формы (рис. 98).

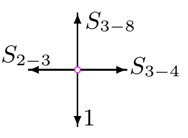

Рис. 102

Строим линию влияния усилия в стойке 2-7 при движении единичного груза *понизу*. Выполняем сечение Риттера, пересекающее стержень 2-7 (рис. 103). Выбираем для составления равновесия левую часть, так как груз, двигаясь понизу, может быть только справа, а слева остается лишь шарнир 1, в котором, очевидно, линия влияния $S_{2-7}(0) = 0$. Итак, составляем уравнение проекций на вертикальную ось

$$\sum Y = -S_{2-7} + Y_A = 0,$$

откуда получаем $S_{2-7} = Y_A$. Строим линию влияния, заменяя левый участок переходной прямой (рис. 99). Линия влияния этого же усилия при движении груза поверху будет существенно иной (рис. 100). При движении груза слева от сечения, рассматриваем равновесие правой части фермы (рис. 103), откуда следует $S_{2-7} = -Y_B$.

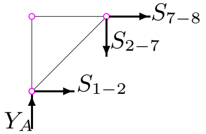

Рис. 103

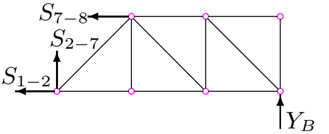

Рис. 104

Линию влияния стержня 2-8 строим аналогично. Выполняем сечение второй панели (рис. 105, 106). Из уравнений проекций на вертикаль для левой части, когда груз находится справа, т.е. при $2a \leqslant x \leqslant 4a$, (рис. 105) имеем $S_{2-8}(x) = -Y_A/\cos 45^\circ = -1.41 Y_A$. Если груз слева от сечения, $0 \leqslant x \leqslant a$, уравнение проекций для правой части дает $S_{2-8}(x) = Y_B/\cos 45^\circ = 1.41 Y_B$. Достраивая недостающий участок ($a \leqslant x \leqslant 2a$) переходной прямой, получаем линию влияния на рис. 101.

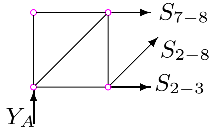

Рис. 105

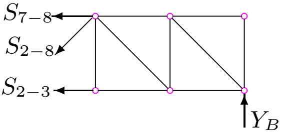

Рис. 106

3. Вычисляем усилия в стержнях 3-4, 3-8, 2-7 от действия постоянной нагрузки $q_{\text{п}} = 6$ кН/м, равномерно распределенной по *всему* нижнему поясу:

$$S_{3-4}^{\text{п}} = \omega_{3-4} q_{\text{п}} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ кН},$$
$$S_{3-8}^{\text{п}} = \omega_{3-8} q_{\text{п}} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ кН},$$
$$S_{2-7}^{\text{п}} = \omega_{2-7} q_{\text{п}} = \tfrac{1}{2} \cdot 0.75 \cdot 4 \cdot 6 = 9 \text{ кН}.$$

Для вычисления $\omega_{2-8} = \omega_{2-8}^{+} + \omega_{2-8}^{-}$ требуется определить координату точки пересечения линии влияния с осью x. Рассматриваем линию влияния на второй панеле ($a \leqslant x \leqslant 2a$ (рис. 107). Из подобия треугольников имеем соотношение $y_1/c = -y_2/(a-c)$, откуда $c = y_1 a/(y_1 - y_2)$. В нашем случае длина панели $a = 1$ м, ординаты линии влияния $y_1 = \sqrt{2}/4 = 0.35$, $y_2 = -\sqrt{2}/2 = 0.7$.

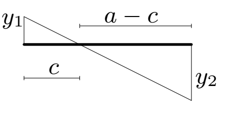

Рис. 107

Получаем: $c = 1/3 = 0.33$ м. Вычисляем площади треугольников:

$$\omega_{2-8}^{+} = \tfrac{1}{2} \cdot 0.35 \cdot (a+c) = 0.236,$$
$$\omega_{2-8}^{-} = -\tfrac{1}{2} \cdot 0.7 \cdot (3a+c) = -0.943,$$
$$\omega_{2-8} = 0.236 - 0.943 = -0.707$$

Заметим, что не вычисляя координату точки пересечения линии влияния с осью x, общую площадь можно вычислить по формуле (11.2) на с. 256, как площадь фигуры, ограниченной ломаной, или, еще проще, по формуле трапеций. Для фермы с панелями одинаковой длины a имеем $\omega = a(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2)$, где y_i, $i = 0, ..., 4$ — ординаты линий влияния. В рассматриваемом случае, где в крайних точках (на опорах) ординаты линии влияния равны нулю, получаем совсем простое выражение: $\omega = a(y_1 + y_2 + y_3)$. Таким образом, усилие в стержне 2-8 от постоянной нагрузки имеет вид

$$S^{\text{п}}_{2-8} = \omega_{2-8} q_{\text{п}} = -0.707 \cdot 6 = -4.243 \text{ кН}.$$

Знак минус в результате показывает, что стержень сжат.

4. Вычисляем максимальные значения усилий в стержнях 3-4, 3-8, 2-7, 2-8 от действия временной нагрузки $q_{\text{вр}} = 16$ кН/м, равномерно распределенной по той части нижнего пояса, где ординаты линии влияния положительные:

$$\begin{aligned} S^{\text{вр}}_{3-4,\max} &= \omega_{3-4} q_{\text{вр}} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 16 = 32 \text{ кН} \\ S^{\text{вр}}_{3-8,\max} &= \omega_{3-8} q_{\text{вр}} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 16 = 16 \text{ кН} \\ S^{\text{вр}}_{2-7,\max} &= \omega_{2-7} q_{\text{вр}} = \tfrac{1}{2} \cdot 0.75 \cdot 4 \cdot 16 = 24 \text{ кН} \\ S^{\text{вр}}_{2-8,\max} &= \omega_{2-8} q_{\text{вр}} = 0.236 \cdot 16 = 3.771 \text{ кН}. \end{aligned}$$

5. Вычисляем минимальное значение в стержнях 3-4, 3-8, 2-7, 2-8 от действия временной нагрузки $q_{\text{вр}} = 16$ кН/м, равномерно распределенной по той части нижнего пояса, где ординаты линии влияния положительные. Стержни 3-4, 3-8 и 2-7 не имеют отрицательных ординат в линиях влияния, соответствующие площади равны нулю.

$$\begin{aligned} &S^{\text{вр}}_{3-4,\min} = S^{\text{вр}}_{3-8,\min} = S^{\text{вр}}_{2-7,\min} = 0, \\ &S^{\text{вр}}_{2-8,\min} = \omega^{-}_{2-8} q_{\text{вр}} = -0.943 \cdot 16 = -15.085 \text{ кН}. \end{aligned}$$

6. Вычисляем максимальные значения усилия от совместного действия временной и постоянной нагрузки:

$$\begin{aligned} S_{3-4,\max} &= S^{\text{вр}}_{3-4,\max} + S^{\text{п}}_{3-4} = 32 + 12 = 44 \text{ кН}, \\ S_{3-8,\max} &= S^{\text{вр}}_{3-8,\max} + S^{\text{п}}_{3-8} = 16 + 6 = 22 \text{ кН}, \\ S_{2-7,\max} &= S^{\text{вр}}_{2-7,\max} + S^{\text{п}}_{2-7} = 24 + 9 = 33 \text{ кН}, \\ S_{2-8,\max} &= S^{\text{вр}}_{2-8,\max} + S^{\text{п}}_{2-8} = 3.771 - 4.243 = -0.471 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Минимальные значения усилия от совместного действия временной и постоянной нагрузки:

$$\begin{aligned} S_{3-4,\min} &= S^{\text{вр}}_{3-4,\min} + S^{\text{п}}_{3-4} = 0 + 12 = 12 \text{ кН}, \\ S_{3-8,\min} &= S^{\text{вр}}_{3-8,\min} + S^{\text{п}}_{3-8} = 0 + 6 = 6 \text{ кН}, \\ S_{2-7,\min} &= S^{\text{вр}}_{2-7,\min} + S^{\text{п}}_{2-7} = 0 + 9 = 9 \text{ кН}, \\ S_{2-8,\min} &= S^{\text{вр}}_{2-8,\min} + S^{\text{п}}_{2-8} = -15.085 - 4.243 = -19.328 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Пример 2 (сложная решетка). Найти максимальное и минимальное усилие в стержне 3-4 фермы от действия постоянной $q_{\text{п}} = 18$ кН/м и временной $q_{\text{вр}} = 6$ кН/м нагрузки, равномерно распределенной по нижнему поясу. Дано: $a = 1$ м, $h = 1$ м (рис. 108).

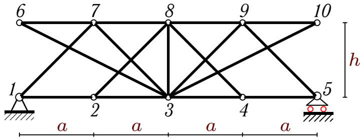

Рис. 108

Решение

1. Строим линии влияния опор фермы $Y_A(x)$, $Y_B(x)$, где x — горизонтальная координата положения единичной вертикальной силы, приложенной к нижнему поясу (рис. 109).

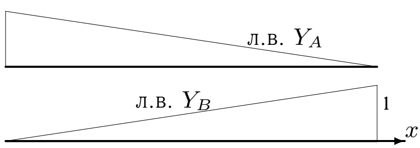

Рис. 109

2. Выражаем усилие S_{3-7} в стержне 3-4 через $Y_A(x)$. Усилие S_{3-7} нельзя найти методом Риттера, так как не существует сечение Риттера, пересекающее три стержня, включая стержень 3-7, и разделяющее ферму на две части. Используем метод вырезания узлов. Из условия равновесия узла 1, совпадающего с опорой A (рис. 110), получим два уравнения в проекциях

$$\begin{aligned} \sum X &= S_{1-7}\cos 45^\circ + S_{1-2} = 0, \\ \sum Y &= S_{1-7}\sin 45^\circ + Y_A(x) = 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

из которых следует $S_{1-2}(x) = Y_A(x)$, т.е. при движении груза *поверху* линия влияния усилия в стержне 1-2 совпадает с линией влияния опоры $Y_A(x)$ и

$$S_{1-7}(x) = -\sqrt{2}\,Y_A(x). \tag{7.2}$$

Вид системы уравнений (7.1) не зависит от положения груза, следовательно, областью определения решения (7.2) является вся длина фермы $0 \leqslant x \leqslant 4a$. Далее вырезаем узел 7. В общем случае рассматривать равновесие узла, к которому присоединены более двух стержней с неопределенными усилиями не имеет смысла — система двух уравнений равновесия с тремя и более неизвестными не имеет однозначного решения. Но в данном случае, два стержня 6-7 и 7-8 лежат на одной прямой, поэтому из уравнения проекций на вертикаль (рис. 111)

$$\sum Y = -S_{3-7}\sin 45^\circ - S_{1-7}\sin 45^\circ = 0 \tag{7.3}$$

сразу получим

$$S_{3-7}(x) = -S_{1-7}(x) = \sqrt{2}\,Y_A(x) \tag{7.4}$$

Область определения этой функции ограничена. В уравнение (7.3) проекции не входит единичная сила, так как предполагалось, что узел и две соседние с ним панели незагружены. Область определения функции (7.4) состоит из точки $x = 0$ и закрытого интервала $2a \leqslant x \leqslant 4a$. При $x = a$ единичная сила приложена к узлу (рис. 112). Уравнение проекций в этом случае имеет вид

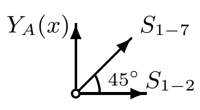

Рис. 110

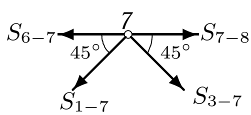

Рис. 111

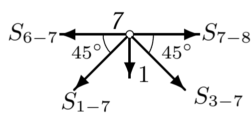

Рис. 112

$$\sum Y = -S_{3-7}\sin 45^\circ - S_{1-7}\sin 45^\circ - 1 = 0, \tag{7.5}$$

откуда $S_{3-7}(a) = -S_{1-7}(a) - \sqrt{2} = -\sqrt{2}/4 = -0.35$. Изображаем график функции (7.4) в области ее определения (рис. 113). Значение $S_{3-7} = -0.35$ при $x = a$, соединяем с крайними точками графика на первой и второй панели переходными прямыми. Получаем линию влияния $S_{3-7}(x)$ (рис. 114)

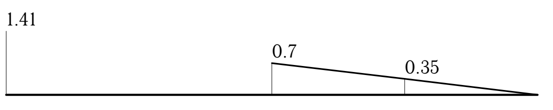

Рис. 113

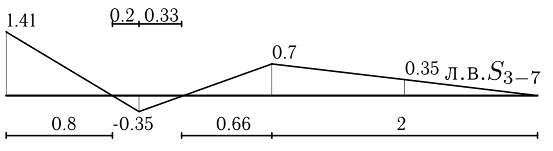

Рис. 114

3. Вычисляем усилие в стержне 3-7 от действия постоянной нагрузки $q_{\text{п}} = 6$ кН/м, равномерно распределенной по *всему* верхнему поясу. Координаты точек пересечения линии влияния с осью x вычисляем из

условия подобия треугольников (с. 118). Получаем $x_1 = 0.8$, $x_2 = 1 + 0.33$. Положительная часть площади на рис. 114

$$\omega^+_{3-7} = 0.5 \cdot 1.41 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.7 \cdot (2 + 0.66) = 1.508.$$

Отрицательная часть площади

$$\omega^-_{3-7} = -0.5 \cdot 0.35 \cdot (0.2 + 0.33) = -0.094.$$

Суммарная площадь

$$\omega_{3-7} = \omega^+_{3-7} + \omega^-_{3-7} = 1.414.$$

Для проверки вычисляем эту же площадь по формуле трапеций

$$\omega_{3-7} = 1 \cdot (1.414/2 - 0.35 + 0.7 + 0.35) = 1.414.$$

Усилие в стержне 3-7 от действия постоянной нагрузки

$$S^{\text{п}}_{3-7} = \omega_{3-7} q_{\text{п}} = 1.414 \cdot 6 = 8.485 \text{ кН}.$$

4. Вычисляем максимальное значение в стержне 3-7 от действия временной нагрузки $q_{\text{вр}} = 18$ кН/м, равномерно распределенной по той части нижнего пояса, где ординаты линии влияния положительные (рис. 115):

$$S^{\text{вр}}_{3-7,\max} = \omega^+_{3-7} q_{\text{вр}} = 1.508 \cdot 18 = 27.153 \text{ кН}.$$

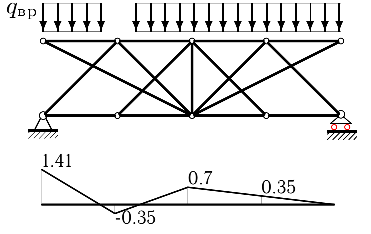

Рис. 115

5. Вычисляем минимальное значение в стержне 3-7 от действия временной нагрузки $q_{\text{вр}} = 18$ кН/м, равномерно распределенной по той части нижнего пояса, где ординаты линии влияния отрицательные:

$$S^{\text{вр}}_{3-7,\min} = \omega^-_{3-7} q_{\text{вр}} = -0.094 \cdot 18 = -1.697 \text{ кН}.$$

6. Вычисляем экстремальные значения усилия от совместного действия временной и постоянной нагрузки:

$$S_{3-7,\,\max} = S^{\text{п}}_{3-7} + S^{\text{вр}}_{3-7\ \max} = 35.638 \text{ кН},$$
$$S_{3-7\ \min} = S^{\text{п}}_{3-7} + S^{\text{вр}}_{3-7\ \min} = 6.788 \text{ кН}.$$