Глава 5

Расчетные задания

Задание 1. Операции над множествами

Универсальное множество состоит из 26 строчных букв латинского алфавита. Заданы множества *A, B, C* и *D* (табл.5.1). Вычислить мощность множеств *X* и *Y*.

Пример выполнения задания

Условие. Даны множества $A=\{a,e,f,j,k\}$, $B=\{f,i,j,l,y\}$, $C=\{j,k,l,y\}$, $D=\{i,j,s,t,u,y,z\}$. Вычислить мощность множеств

$X=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ и $Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$.

Решение.

1. Определим элементы множества $X=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. Для этого найдем сначала пересечение множеств $A\cap C$. Элементы *j* и *k* одновременно принадлежат множеству *A* и *C*. Следовательно, $A\cap C=\{j,k\}$. Аналогично, $B\cap C=\{j,l,y\}$. Таким образом, объединение $A\cap C$ и $B\cap C$ состоит из четырех элементов $\{j,k,l,y\}$. Мощность множества $X=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ равна 4.

2. Определим элементы множества $Y=(A\cap\overline{B})\cup(D\setminus C)$. Найдем дополнение $\overline{B}$. Универсальное множество по условию задания состоит их 26 букв $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$. Если отсюда исключить 5 элементов множества *B*, то получим множество $\overline{B}$ из 21 элемента $\{a,b,c,d,e,g,h,k,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,z\}$. Пересечение множеств $A\cap\overline{B}$ состоит из элементов $\{a,e,k\}$, т.е. всех элементов множества *A* , которые не принадлежат *B*[1].

---

[1] $A\setminus B$

Для нахождения разности множеств $D \setminus C$ вычеркнем из множества *D={i,j,s,t,u,y,z}* элементы *{j,y}*, принадлежащие *C={ j,k,l,y}*. Получим $D \setminus C$ *={i,s,t,u,z}*. В итоге

$$Y = (A \cap \overline{B}) \cup (D \setminus C) = \{a,e,k,i,s,t,u,z\}.$$

Мощность множества Y равна 8. В данном случае множества $D \setminus C$ и $A \cap \overline{B}$ не пересекаются и мощность объединения равна сумме мощностей слагаемых

$$Card\ Y = Card(A \cap \overline{B}) + Card(D \setminus C) = 3+5.$$

Табл.5.1 Задание 1

1	*A={ a,e,f,k,t}, B={ f,i,j,p,y}, C={ j,k,l,y}, D={i,j,s,t,u,y,z}* $X = (A \cap B) \cup (D \cap C)$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
2	*A={ b,h,m,o,r}, B={j,k,o,u,y}, C={g,h,j}, D={g,j,q}* $X = (A \cap C) \cup (D \cap B)$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
3	*A={ c,m,n,o,q}, B={c,d,m,w}, C={m,n,q}, D={c,m,p},* $X = (A \cup B) \cap C$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
4	*A={ b,d,l,p}, B={b,d,e,l,p,x}, C={k,l,p,t}, D={d,k,o,p,q,u,v},* $X = (A \setminus B) \cap (C \cap D)$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
5	*A={ c,e,h,n}, B={e,f,k,n,x}, C={b,c,h,p,r,s}, D={b,e,g},* $X = (A \setminus B) \cap (C \cup D)$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
6	*A={a,b,f,g,i}, B={c,f,g,i,s,v}, C={a,g,h,i}, D={f,w,x},* $X = (A \cap B) \cup C$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
7	*A={b,f,g,m,o}, B={b,g,h,l,u}, C={e,f,m}, D={e,g,l,p,q,u,v},* $X = (A \cap C) \cup B$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
8	*A={b,c,h,i,j}, B={e,h,i,s,w}, C={a,b,j,k,l,m}, D={a,h,i,w,x},* $X = (A \setminus C) \cap \overline{B}$, $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (C \setminus D)$.
9	*A={a,e,f,i}, B={a,b,k,n}, C={e,f,n,o,w,x}, D={a,d,e,o,p,t,u},* $X = (A \cup B) \cap D$, $Y = (\overline{A} \cap \overline{B}) \setminus (C \cup D)$.
10	*A={a,b,h,j,l}, B={b,c,h,l,r,v}, C={j,k,n,t,z}, D={b,i,k,v,w},*

Табл.5.1 Задание 1

	$X=(A\cup D)\cap C,\ Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
11	*A={a,h,k}, B={c,d,h,p,r}, C={h,i,s}, D={c,g,j,v,w},* $X=(A\cup B)\cap C, Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
12	*A={a,d,k,l,o,s}, B={d,e,k,s,u,x}, C={o,p,w}, D={d,n,r,y,z},* $X=(A\setminus B)\cap(C\cap D), Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
13	*A={a,b,g,k,m,p}, B={b,e,f,l,r}, C={k,l,w,x}, D={e,j,o,p,q,u,v},* $X=(A\setminus B)\cap(C\cup D), Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
14	*A={a,f,i,n,o}, B={f,g,o,p,z}, C={i,j,u,w}, D={f,h,n,t,u,y,z},* $X=(A\cap B)\cup C,\ Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
15	*A={a,b,h,k,o,r}, B={b,g,h,l,s}, C={k,l,z}, D={g,j,p,q,u,v},* $X=(A\cap C)\cup B,\ Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
16	*A={a,e,g,o,p}, B={e,h,i,o,u}, C={g,h,p,s,t,w}, D={f,h,n,s,t,x,y},* $X=(A\setminus C)\cap\overline{B},\ Y=(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus(C\cup D)$.
17	*A={b,k,n,o,q}, B={a,b,k,u}, C={o,p}, D={a,m,n,y,z},* $X=(A\cup B)\cap D,\ Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
18	*A={a,b,c,d,e,r}, B={b,c,d,f,n,y},C={b,c,h,k,l,s}, D={a,b,r,s,w,x},* $X=(A\cup D)\cap C,\ Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
19	*A={b,e,g,h,k,s}, B={c,g,p,q}, C={f,g,s,x,y,z}, D={a,c,d,g,u,v,z},* $X=(A\cup B)\cap C,\ Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
20	*A={a,b,c,e,t}, B={b,c,d,e,m,u}, C={b,c,f,g,h,u}, D={a,d,q,r,v,w},* $X=(A\setminus B)\cap(C\cap D), Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
21	*A={b,d,f,g,l,u}, B={d,e,f,m,n,z}, C={h,i,r,x,y}, D={a,e,f,k,r,s,x},* $X=(A\setminus B)\cap(C\cup D), Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
22	*A={b,d,j,n,t,v}, B={f,g,j,r,t,x}, C={o,p,x}, D={a,f,m,s,x,y},* $X=(A\cap B)\cup C,\ Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
23	*A={b,c,g,i,w}, B={e,g,h,q,w}, C={c,d,k,l,y}, D={a,g,h,u,v,z},* $X=(A\cap C)\cup B,\ Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
24	*A={a,b,d,l,x}, B={d,e,h,i,n,u}, C={e,f,m,n}, D={a,c,h,k,r,s,w,x},*

Табл.5.1 Задание 1

	$X=(A\setminus C)\cap\overline{B},\quad Y=(\overline{A}\cap D)\cup(C\setminus B)$.
25	*A={c,g,h,k,y}, B={a,b,k,n,u}, C={i,j,o,y,z}, D={a,b,f,g,y,z},* $X=(A\cup B)\cap D,\quad Y=(A\setminus D)\cup(\overline{C}\setminus\overline{B})$.
26	*A={c,d,k,l,m,z}, B={b,c,d,n,w}, C={m,n,y}, D={b,j,l,r,s,w,x},* $X=(A\cup D)\cap C,\ Y=(A\setminus D)\cup(\overline{C}\setminus\overline{B})$.
27	*A={c,g,h,i,j}, B={c,d,i,o,s}, C={i,j,r,z}, D={b,c,f,i,w,x},* $X=(A\cup B)\cap C, Y=(A\setminus D)\cup(\overline{C}\setminus\overline{B})$.
28	*A={c,f,h,l,o}, B={d,e,f,p,w}, C={j,k}, D={b,d,g,k,t,u,y,z}* $X=(A\setminus B)\cap(C\cap D), Y=(A\setminus D)\cup(\overline{C}\setminus\overline{B})$.
29	*A={c,f,g,k}, B={e,f,g,m,q}, C={h,i,r,w,x}, D={b,e,j,u,v,z},* $X=(A\setminus B)\cap(C\cup D), Y=(A\setminus D)\cup(\overline{C}\setminus\overline{B})$.
30	*A={b,c,h,o}, B={d,f,g,o,v,y}, C={d,e,j,k}, D={a,b,f,g},* $X=(A\cap B)\cup C,\quad Y=(A\setminus D)\cup(\overline{C}\setminus\overline{B})$.

Задание 2. Транзитивное замыкание отношения

Отношение задано матрицей (табл. 5.2). Исследовать отношение на симметрию, антисимметрию, асимметрию, рефлексивность, антирефлексивность. Найти транзитивное замыкание отношения. Построить граф отношения и его транзитивного замыкания.

Пример выполнения задания

<u>Условие.</u> Матрица M отношения ρ имеет следующий вид:

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

1
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

5
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

6
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

7
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

8
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

9
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

10
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

11
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

12
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

13
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

14
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

15
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

16
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

17
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

18
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

19
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

20
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

21
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Табл. 5.2

22
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

23
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

24
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

25
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

26
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

27
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

28
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

29
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

30
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Табл. 5.2

Исследовать свойства отношения и построить его транзитивное замыкание.

<u>Решение</u>

1. Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,1) принадлежит ρ, а пара (1,2) ему не принадлежит.
2. Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1,\ i \neq j.$
3. Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1. .
4. Все диагональные элементы матрицы рефлексивного отношения равны 1. Данное отношение не является рефлексивным.
5. Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как диагональ матрицы ненулевая.

Найдем транзитивное замыкание ρ .

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,4) и (4,3) принадлежат ρ , а пара (1,3) ему не принадлежит.

Способ 1.

Вычисляем матрицу композиции $\rho^2 = \rho \circ \rho$. Для этого умножаем[2] матрицу M на себя $M_1 = MM$. Для *i,j=1..4* вычисляем

$m_{1_{ij}} = (m_{i1} \wedge m_{1j}) \vee (m_{i2} \wedge m_{2j}) \vee (m_{i3} \wedge m_{3j}) \vee (m_{i4} \wedge m_{4j})$

Получаем

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Находим логическую сумму (дизъюнкцию) исходной и полученной матрицы. Поэлементная дизъюнкция матриц дает

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Сравним M_2 и матрицу *М*. Если M_2 =*М*, то M_2 — искомая матрица. Если $M_2 \neq M$, то полагаем $M_2 = M$, возвращаемся к п. 1 и по-

---

[2] Не путать произведение булевых матриц *A*=*BC* с поэлементным логическим умножением $B \wedge C$. Очевидно $a_{ij} = 1$, если хотя бы в одном случае *k* -й элемент *i* -й строки первого сомножителя и *k* -й элемент *j*-го столбца второго сомножителя одновременно равны 1. В противном случае $a_{ij} = 0$.

вторяем всю процедуру для новой матрицы. В данном случае $M_2 \neq M$. Принимаем

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и для новой матрицы повторяем п.1.

1'. Умножаем матрицу M на себя

$$M_1 = MM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2'. Находим логическую сумму (дизъюнкцию) матриц

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.' Сравним M_2 и матрицу *M*. В данном случае $M_2 \neq M$. Принимаем $M_2 = M$ и для новой матрицы повторяем п.1.

1''.

$$M_1 = MM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2''. Находим логическую сумму

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3". Сравниваем: $M_2 = M$. Следовательно, M_2 — матрица транзитивного замыкания заданного отношения.

Построим граф отношения (рис.5.1) и граф его транзитивного замыкания (рис.5.2). Диагональные элементы матрицы соответствуют петлям на графе. Матрица несимметричная, поэтому граф отношения ориентированный.

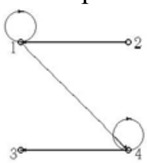

Рис.5.1

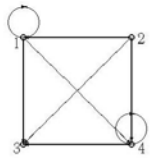

Рис.5.2

Способ 2. (Алгоритм Уоршолла)

Рассматриваем все внедиагональные ($i \neq j$) элементы матрицы. Если $m_{ij} = 1$, то *i*-ю строку заменяем дизъюнкцией *i*-й и *j*-й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Элемент $m_{21} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и первой строки

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Элемент $m_{43} = 1$. Дизъюнкция четвертой и третьей строки не меняет вид матрицы. Таким образом, полученная матрица является матрицей транзитивного замыкания отношения ρ. Оба способа дают один и тот же результат.

Задание 3. Алгебраическая структура

На множестве упорядоченных пар

$$x_0 = (0,0),\, x_1 = (1,0),\; x_2 = (0,1),\; x_3 = (1,1) \qquad (5.1)$$

задана бинарная мультипликативная операция. В таблице 5.4 для пар $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ указано правило вычисления произведения $A * B$. Является ли полугруппой структура (X, *), где $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$? Составить таблицу Кэли структуры.

Пример выполнения задания

Условие. Произведение задано по правилу $A * B = (a_1 b_1, a_2 b_2)$. Проверить, является ли полугруппой структура (X, *), где множество X состоит из четырех элементов (5.1).

Решение

Проверим ассоциативность введенного произведения — необходимое свойство для того, чтобы алгебраическая структура была полугруппой. Рассмотрим произведение $A * (B * C)$ трех произвольных пар из X : $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$. Найдем сначала произведение $B*C=(b_1c_1,b_2c_2)$, затем получим $A*(B*C)=(a_1b_1c_1,a_2b_2c_2)$.

Аналогично:

$$(A*B)*C=(a_1b_1,a_2b_2)*(c_1,c_2)=(a_1b_1c_1,a_2b_2c_2).$$

Очевидно, $(A*B)*C=A*(B*C)$, т.е. операция умножения ассоциативна и алгебраическая структура (X, *) является полугруппой. Составим таблицу Кэли. А.Перемножим попарно все элементы множества X. Очевидно, любой элемент x_k (k=0,1,2,3) умноженный на x_0 даст элемент x_0, а произведение x_k на x_3 не изменит x_k, т.е. $x_0*x_k=(0,0)=x_0$, а $x_k*x_3=x_k$. Кроме этого, $x_1*x_2=(1,0)*(0,1)=(0,0)=x_0$. В итоге запишем таблицу Кэли

*	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	x_0	x_0	x_0	x_0
x_1	x_0	x_1	x_0	x_1
x_2	x_0	x_0	x_2	x_2
x_3	x_0	x_1	x_2	x_3

Табл. 5.3.

Полугруппа (X, *) является коммутативным моноидом с единицей x_3. Обратных элементов у x_0, x_1 и x_2 нет, поэтому (X, *) группой не является.

Табл. 5.4

1	$A*B=(a_2b_1,a_1b_2)$	2	$A*B=(a_1b_2,a_2b_1)$
3	$A*B=(a_1b_2,a_2b_2)$	4	$A*B=(a_1b_1,a_2b_1)$
5	$A*B=(a_2b_1,a_2b_2)$	6	$A*B=(a_2b_2,a_1b_1)$
7	$A*B=(a_2b_2,a_1b_2)$	8	$A*B=(a_2b_1,a_1b_1)$
9	$A*B=(a_1b_1,a_2)$	10	$A*B=(a_1b_1,b_2)$
11	$A*B=(b_1,a_2b_2)$	12	$A*B=(a_1,a_2b_2)$
13	$A*B=(a_2,a_1b_1)$	14	$A*B=(b_2,a_1b_1)$
15	$A*B=(a_2b_2,b_1)$	16	$A*B=(a_2b_2,a_1)$
17	$A*B=(a_1b_1,a_2b_2)$	18	$A*B=(a_1b_1,a_2b_2)$
19	$A*B=(a_1b_1a_2,b_2)$	20	$A*B=(b_2,a_1b_1a_2)$
21	$A*B=(a_1,a_2b_1b_2)$	22	$A*B=(b_1a_2b_2,a_1)$
23	$A*B=(a_1b_1b_2,a_2)$	24	$A*B=(a_2,a_1b_2b_1)$
25	$A*B=(b_1,a_1a_2b_2)$	26	$A*B=(a_1a_2b_2,b_1)$
27	$A*B=(a_1b_1a_2,a_2b_2)$	28	$A*B=(a_2,a_1b_1a_2b_2)$
29	$A*B=(a_1b_1a_2b_2,a_2)$	30	$A*B=(a_1b_1b_2,a_2b_2)$

Задание 4. Элементы математической логики

1. Проверить равносильность формул.
2. Записать формулу в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

Вариант 1

1. $x \mid (y \vee z)$ и $(x \mid y) \vee (x \mid z)$ 2. $\overline{((x \vee \bar{y}) \wedge z)}$

Вариант 2

1. $x \wedge (y \vee \bar{z})$ и $\overline{(x \to \bar{y} \wedge \bar{z})}$ 2. $\overline{(x \downarrow z)} \wedge y$

Вариант 3

1. $x \vee (y \mid z)$ и $\bar{x} \to (y \downarrow z)$ 2. $(\bar{x} \oplus y) \wedge z$

Вариант 4

1. $(x \wedge y) \downarrow z$ и $(x \downarrow z) \vee (y \downarrow z)$ 2. $\overline{(y \mid z) \wedge x}$

Вариант 5

1. $\overline{(x \oplus y)} \wedge z$ и $(\bar{x} \wedge z) \oplus (\bar{y} \wedge z)$ 2. $(\overline{y \to x}) \vee \bar{z}$

Вариант 6

1. $x \wedge (y \mid z)$ и $x \to \overline{(y \mid z)}$ 2. $(\bar{x} \leftrightarrow z) \wedge \bar{y}$

Вариант 7

1. $(x \wedge y) \to z$ и $(\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge z$ 2. $(x \to \bar{y}) \mid z$

Вариант 8

1. $(x \oplus y) \leftrightarrow z$ и $(x \leftrightarrow z) \oplus (y \leftrightarrow z)$ 2. $x \leftrightarrow (y \mid \bar{z})$

Вариант 9

1. $x \wedge (y \downarrow z)$ и $x \to (y \vee z)$ 2. $x \to (\bar{y} \oplus z)$

Вариант 10

1. $((x \downarrow y) \wedge z) \vee ((x \downarrow y) \wedge \bar{z}))$ и $x \downarrow (y \wedge z)$ 2. $x \oplus (\bar{y} \to z)$

Вариант 11

1. $(x \vee y) \wedge (y \mid z)$ и $\bar{x} \wedge \bar{y} \to z$ 2. $(\bar{x} \downarrow y) \oplus z$

Вариант 12

1. $x \to (y \mid z)$ и $\overline{(x \to (y \mid z))} \to (x \wedge y) \mid z$ 2. $\overline{(x \oplus y) \wedge z}$

Вариант 13

1. $(x \mid y) \wedge z$ и $(x \wedge z) \mid (y \wedge z)$ 2. $(x \leftrightarrow \bar{y}) \oplus z$

Вариант 14

1. $x \vee ((\bar{y} \downarrow z) \wedge \bar{x}))$ и $(\bar{y} \downarrow z) \vee x$ 2. $\overline{((\bar{x} \wedge y) \vee z)}$

Вариант 15

1. $(x \oplus y) \vee \bar{z}$ и $(x \vee \bar{z}) \oplus (x \vee \bar{z})$ 2. $(\bar{x} \vee \bar{y}) \mid z$

Вариант 16

1. $x \wedge (y \downarrow z)$ и $(x \wedge y) \downarrow (x \wedge z)$ 2. $\overline{(x \oplus \bar{y})} \wedge z$

Вариант 17

1. $x \downarrow (y \oplus z)$ и $(x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$ 2. $(y \mid \bar{z}) \to x$

Вариант 18

1. $x \vee \overline{(y \mid z)}$ и $\bar{x} \leftrightarrow (y \downarrow z)$ 2. $\overline{(y \leftrightarrow \bar{x})} \wedge z$

Вариант 19

1. $x \wedge ((\bar{y} \mid z) \vee x)$ и $y \to x \wedge \bar{z}$ 2. $\overline{((\bar{x} \oplus z) \to \bar{y})}$

Вариант 20

1. $x \vee \overline{(y \mid z)}$ и $\bar{x} \leftrightarrow (y \mid z)$ 2. $(\bar{x} \to y) \to \bar{z}$

Вариант 21

1. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ и $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$ 2. $x \to (y \oplus \bar{z})$

Вариант 22

1. $(x \vee y) \to \bar{z}$ и $(\bar{x} \wedge y) \vee \bar{z}$ 2. $x \oplus (\bar{y} \leftrightarrow z)$

Вариант 23

1. $(x \oplus \overline{y}) \wedge z$ и $(x \wedge z) \oplus (\overline{y} \wedge z)$ 2. $(\overline{x} \downarrow y) \to z$

Вариант 24

1. $x \to (y \leftrightarrow z)$ и $(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$ 2. $(\overline{z \oplus x}) \leftrightarrow y$

Вариант 25

1. $(x \downarrow y) \to \overline{z}$ и $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \to z$ 2. $(x \vee y) \oplus \overline{z}$

Вариант 26

1. $(x \mid y) \vee \overline{z}$ и $(x \downarrow y) \to z$ 2. $\overline{(\overline{x} \to y)} \wedge z$

Вариант 27

1. $(x \mid \overline{y}) \leftrightarrow z$ и $(x \leftrightarrow z) \mid (\overline{y} \leftrightarrow z)$ 2. $(y \leftrightarrow \overline{x}) \oplus z$

Вариант 28

1. $(\overline{x} \wedge y) \leftrightarrow z$ и $(y \wedge \overline{z}) \to (x \vee \overline{y})$ 2. $\overline{(x \downarrow y)} \wedge z$

Вариант 29

1. $(\overline{x} \oplus y) \vee z$ и $(\overline{x} \vee z) \to \overline{y}$ 2. $\overline{((x \mid y) \wedge z)}$

Вариант 30

1. $(x \oplus y) \vee \overline{z}$ и $\overline{(x \oplus y)} \to \overline{z}$ 2. $x \to \overline{(y \downarrow \overline{z})}$

Предложенные задачи аналогичны примерам 3.10, 3.22, 3.25.

Задание 5. Неориентированный граф

Дан неограф (рис.5.4-5.5). Проанализировать свойства графа:

1. построить матрицу инцидентности,
2. построить матрицу смежности,

3. найти степени вершин графов,
4. найти цикломатическое число графа,
5. найти радиус и диаметр,
6. проверить наличие эйлеровой цепи
7. вычислить количество циклических маршрутов длины 3.

Пример выполнения задания

Условие. Проанализировать свойства графа

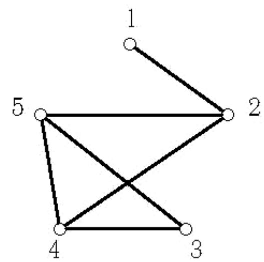

Рис.5.3

Решение

1. Построим матрицу инцидентности. Ребра обозначаем по именам вершин, инцидентных данному ребру. Матрица инцидентности не обязательно квадратная, сумма элементов любого столбца равна 2. Для неографа без петель элементы могут быть 0 или 1.

	1 – 2	2 – 4	2 – 5	3 – 4	3 – 5	4 – 5
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	1	0	1	1

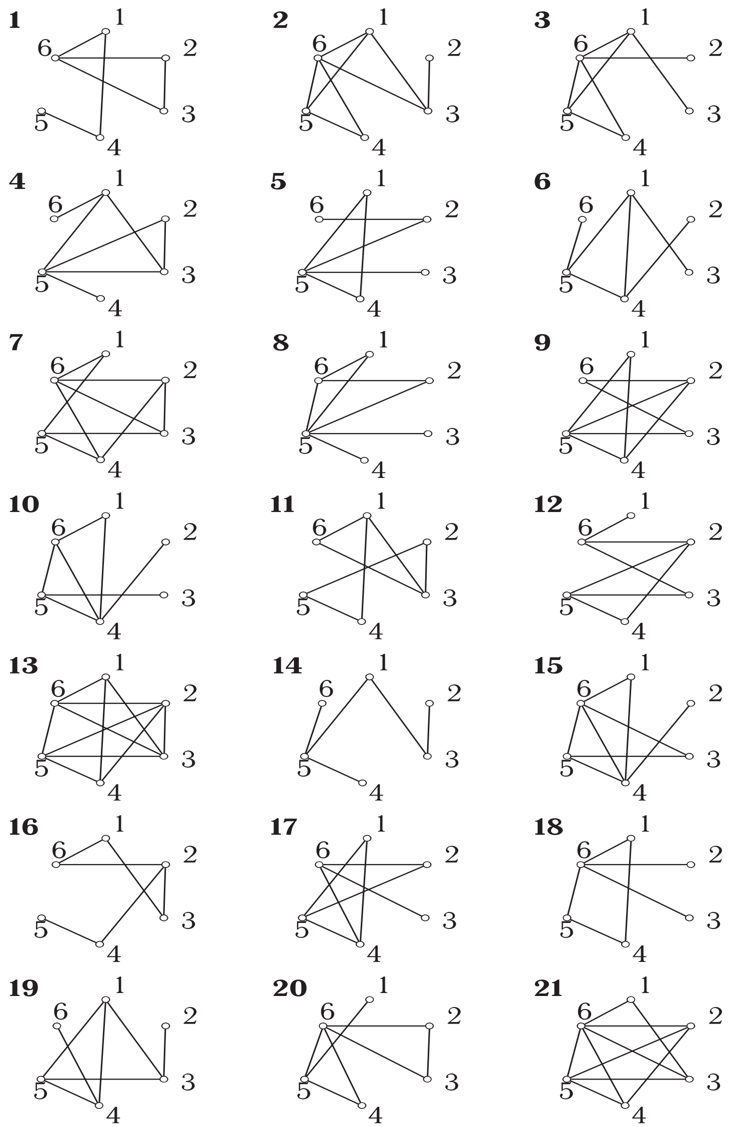

Рис.5.4

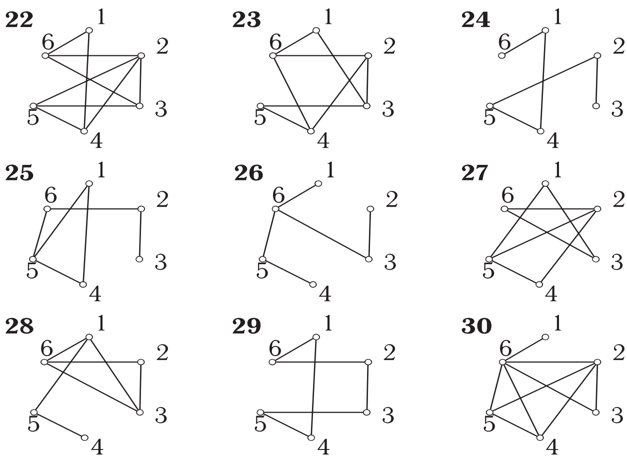

Рис.5.5

2. Построим матрицу смежности:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица смежности неографа симметричная, $m_{ij} = 1$, если вершина *i* и вершина *j* соединены ребром, в противном случае $m_{ij} = 0$

3. Найдем степени вершин графов. Вершина №1 имеет степень 1 (ей инцидентно одно ребро), вершина № 3 — 2, остальные вершины — степень 3.

4. Цикломатическое число (коранг) связного графа вычисляется по формуле $\nu = m - n + 1$, где *m* — число ребер, *n* — число вершин. В данном случае шесть ребер и пять вершин, следователь-

но, $\nu = 6 - 5 + 1 = 2$. Это число ребер надо удалить из графа, чтобы получить его остов.

5. Найдем радиус и диаметр графа. Находя цепи наименьшей длины, вычислим расстояния между вершинами. Результаты занесем в таблицу. Для неографа таблица является симметричной матрицей. Для сокращения вычислений находим элементы половины матрицы, заполняя другую половину из условия симметрии

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычисляем эксцентриситет ε каждой вершины — расстояние до максимально удаленной от нее вершины. Эту величину можно определять как максимальный элемент соответствующего столбца матрицы расстояний. Получаем таблицу эксцентриситетов

№	1	2	3	4	5
ε	3	2	3	2	2

Радиус графа *r* — минимальный эксцентриситет вершин. В данном случае *r*=2. Такой эксцентриситет имеют вершины № 2, № 4 и № 5. Эти вершины образуют центр графа. Диаметр графа *d* — максимальный эксцентриситет вершин. В данном случае *d*=3. Такой эксцентриситет имеют вершины № 1 и №3 — это периферия графа.

6. Ответим на вопрос, обладает ли граф эйлеровой цепью? Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен и число вершин нечетной степени равно 0 или 2. В данном случае 4 вершины нечетной степени (№№1, 2, 4, 5). Граф эйлеровой цепью не обладает, т.е. нет цепи, содержащей все ребра графа по одному разу.

7. Вычислим число циклических маршрутов длины 3. Возведем матрицу смежности в 3-ю степень

$$M^3 = MMM = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Диагональные элементы показывают число циклических маршрутов длины 3. Например, маршруты, исходящие из вершины 5 и возвращающиеся в нее же, это маршруты 5-2-4-5, 5-4-2-5, 5-3-4-5, 5-4-3-5. Суммарное число маршрутов длины 3 равно 0+2+2+4+4=12. Некоторые маршруты отличаются только начальными точками.

Задание 6. Ориентированный граф

Дан орграф (рис.5.7-5.8). Найти число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4.

Пример выполнения задания

Дан орграф (рис.5.6). Найдем число маршрутов длины 2 из вершины № 3 в № 2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4.

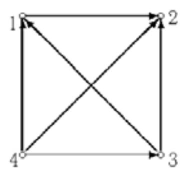

Рис.5.6

Решение

Запишем матрицу смежности графа. Элемент матрицы $m_{ij} = 1$, если есть ребро, выходящее из вершины i и входящее в вершину j Матрица смежности простого орграфа несимметричная

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Для вычисления числа маршрутов длины 2 найдем $K = M^2 = MM$. Произведение матриц понимается в алгебраическом смысле. Получим

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $k_{32} = 1$, то число маршрутов из вершины 3 в 2 равно 1. Очевидно, это маршрут 3-1-2. Для вычисления числа маршрутов длины 3 найдем $K = M^3$. Получим

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как из всех элементов матрицы только $k_{42} = 1$, то маршрут длины 3 единственный. Очевидно, это маршрут 4-3-1-2. Легко видеть, что матрица M^4 нулевая, следовательно маршрутов длины 4 в графе нет.

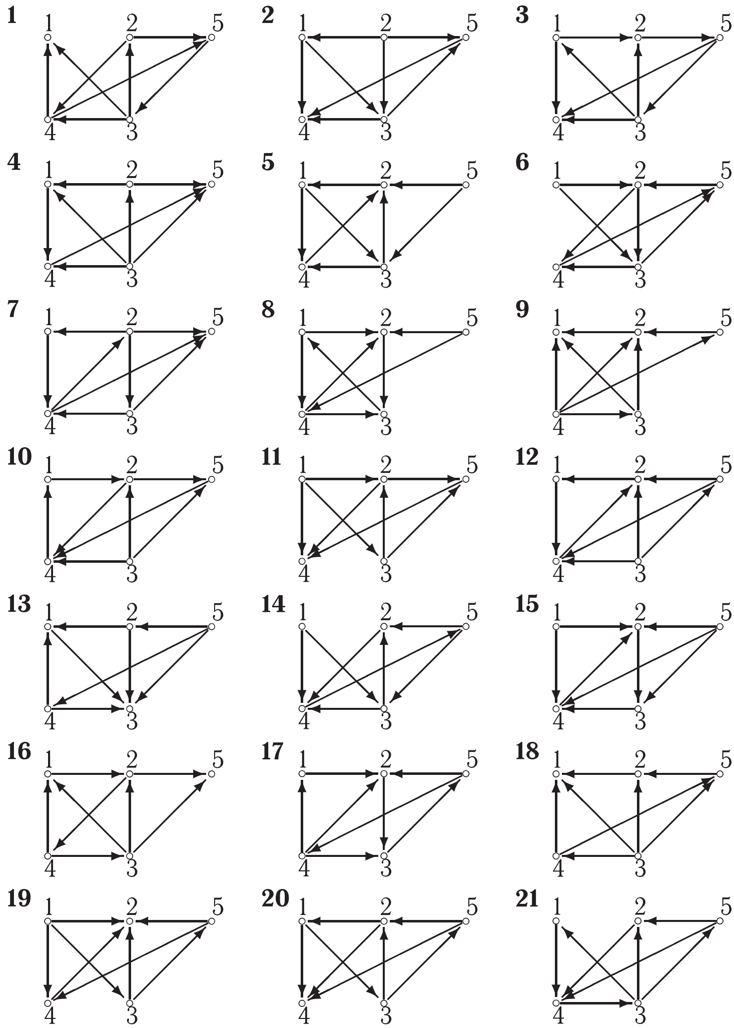

Рис. 5.7

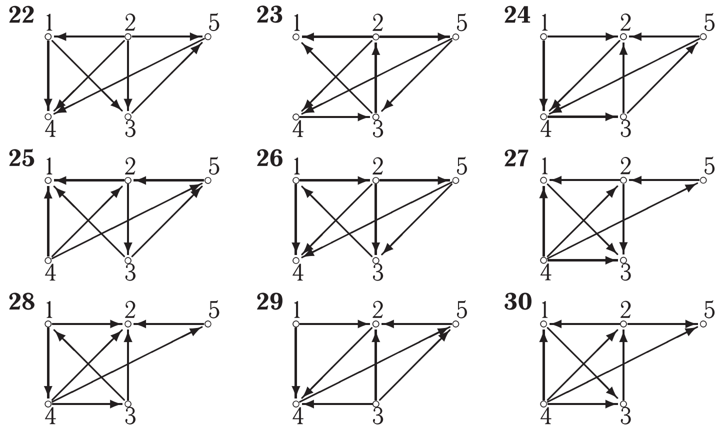

Рис. 5.8

Задание 7. Минимальный остов графа

Дан взвешенный граф (рис.5.10-5.11). Найти остов минимального веса (экстремальное дерево).

Пример выполнения задания

Дан взвешенный граф (рис. 5.9). Найти остов минимального веса (экстремальное дерево).

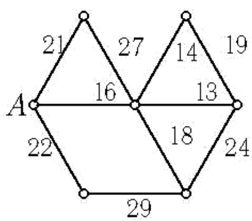

Рис. 5.9

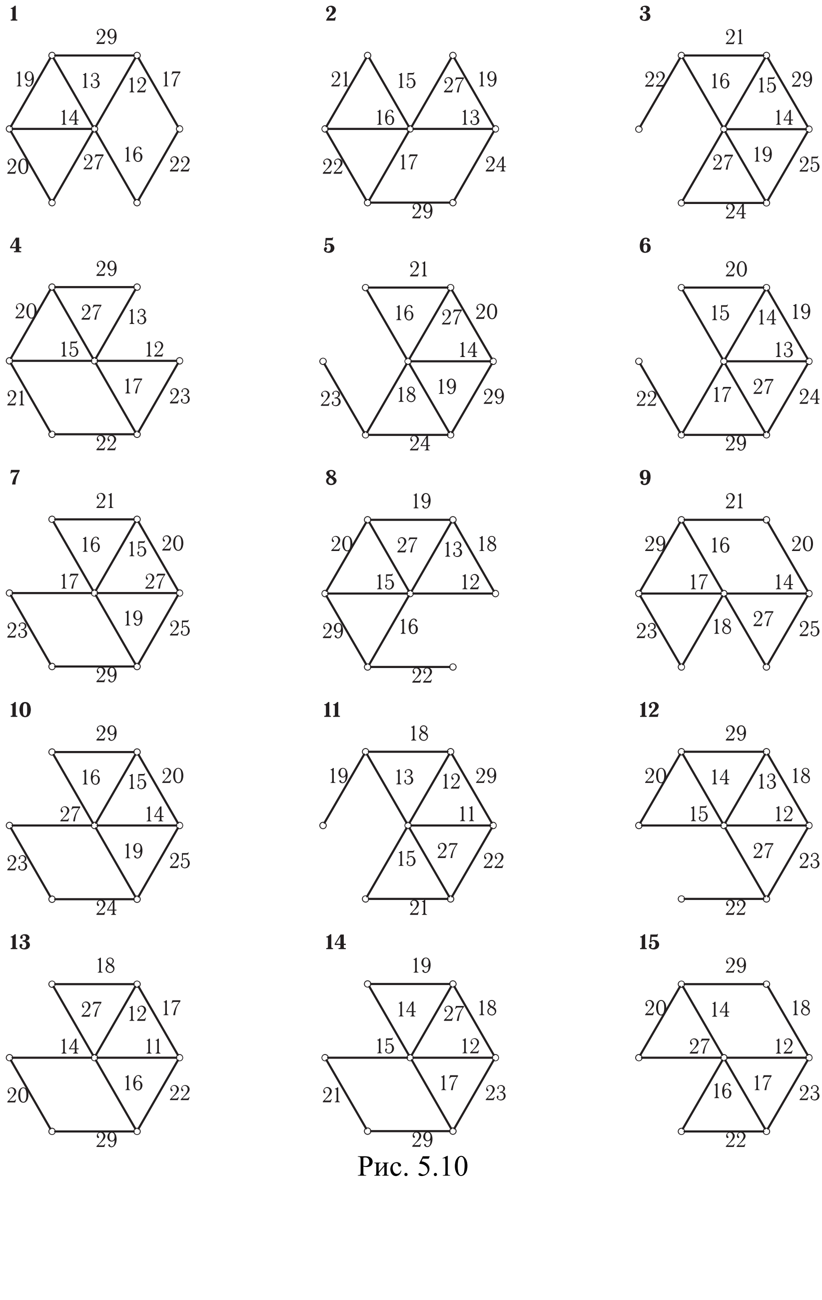
1
29
19
13
12
17
14
20
27
16
22
2
21
15
27
19
16
13
22
17
24
29
3
21
22
16
15
29
14
27
19
25
24
4
29
20
27
13
15
12
21
17
23
22
5
21
16
27
20
14
23
18
19
29
24
6
20
15
14
19
13
22
17
27
24
29
7
21
16
15
20
17
27
23
19
25
29
8
19
20
27
13
18
15
12
29
16
22
9
21
29
16
20
17
14
23
18
27
25
10
29
16
15
20
27
14
23
19
25
24
11
18
19
13
12
29
11
15
27
22
21
12
29
20
14
13
18
15
12
27
23
22
13
18
27
12
17
14
11
20
16
22
29
14
19
14
27
18
15
12
21
17
23
29
15
29
20
14
18
27
12
16
17
23
22

Рис. 5.10

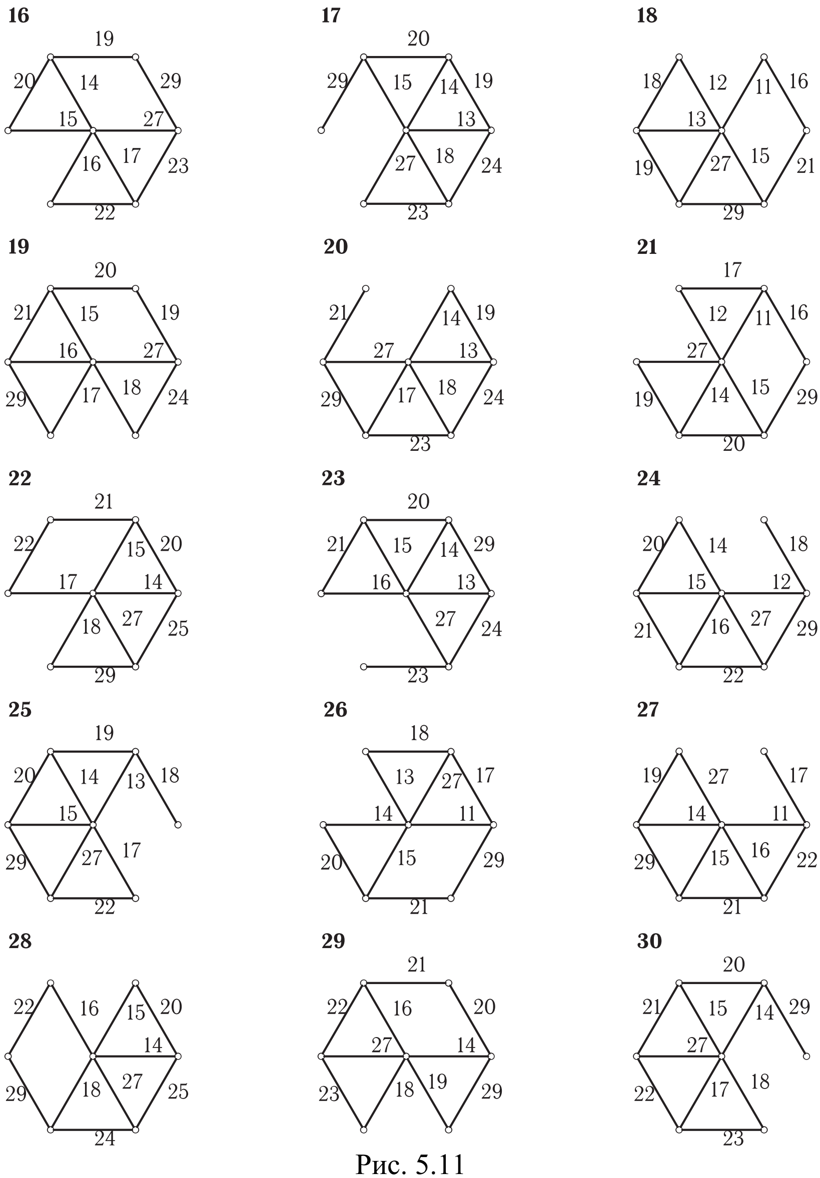
16
19 20 14 29 15 27 16 17 23 22
17
20 29 15 14 19 13 27 18 24 23
18
18 12 11 16 13 19 27 15 21 29
19
20 21 15 19 16 27 29 17 18 24
20
21 14 19 27 13 29 17 18 24 23
21
17 12 11 16 27 19 14 15 29 20
22
21 22 15 20 17 14 18 27 25 29
23
20 21 15 14 29 16 13 27 24 23
24
20 14 18 15 12 21 16 27 29 22
25
19 20 14 13 18 15 29 27 17 22
26
18 13 27 17 14 11 20 15 29 21
27
19 27 17 14 11 29 15 16 22 21
28
22 16 15 20 14 29 18 27 25 24
29
21 22 16 20 27 14 23 18 19 29
30
20 21 15 14 29 27 22 17 18 23

Рис. 5.11

<u>Решение</u>

Способ 1. Алгоритм Дж. Краскала

Строим граф, присоединяя к пустому графу на множестве вершин заданного графа ребро наименьшего веса. К полученному графу последовательно присоединяем остальные ребра, выбирая на каждом шаге ребро наименьшего веса, не образующее цикл с имеющимися ребрами. В нашем случае начинаем с ребра весом 13 — наименьшего в графе. На рисунках 5.12-5.13 приведена последовательность действий. Ребро весом 19 не включается в остов, так как оно образует цикл с ребрами весом 14 и 13.

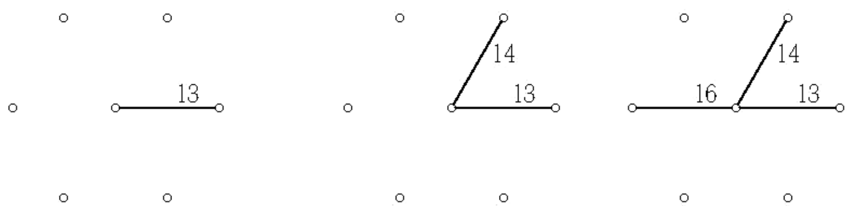

Рис.5.12.

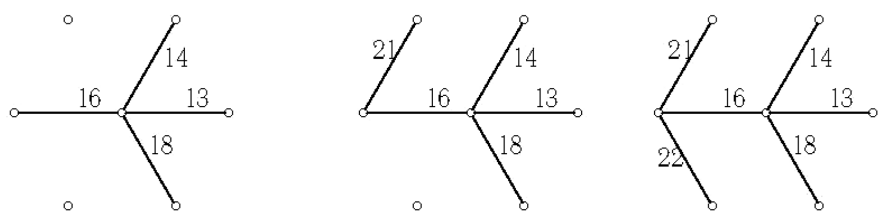

Рис.5.13.

Способ 2. Алгоритм ближайшего соседа

Алгоритм Дж. Краскала требует на каждом шаге проверки на цикличности предварительной сортировки ребер по весам, что затруднительно для графов с большим числом ребер. Несколько проще следующий алгоритм.

1. Отмечаем произвольную вершину графа, с какой начнется построение. Строим ребро наименьшего веса, инцидентное этой вершине.
2. Ищем ребро минимального веса инцидентное одной их двух полученных вершин. В множество поиска не входит построенное ребро.
3. Продолжаем далее, разыскивая каждый раз ребро наименьшего веса, инцидентное построенным вершинам, не включая в круг поиска все ребра, их соединяющие.

В нашем примере начнем с вершины *A*. На рисунках 5.14-5.15 дана последовательность действий.

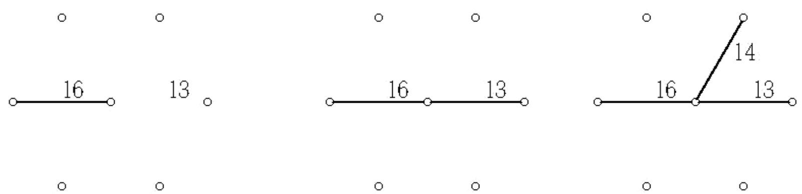

Рис.5.14

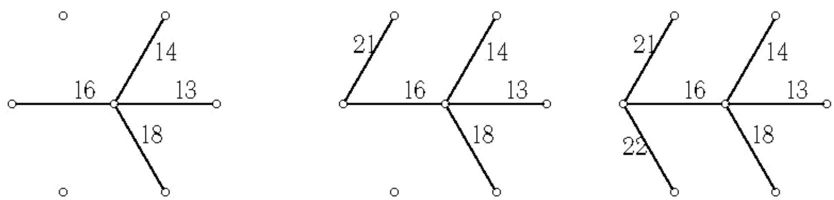

Рис.5.15

Литература

1. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы –Ижевск: РХД, 2001.
2. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976.
4. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 1998.
5. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987.
6. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы.– М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
7. Иванов Б.Н. Дискретная математика. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007.
8. Касьянов В.Н., Евстегнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб, БХВ-Петербург, 2003
9. Кирсанов М.Н. Графы в *Maple*. –М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.:Наука, 1977.
11. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
12. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.
13. Лекции по теории графов /Емеличев В.И., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И./ – М.: Наука, 1990.
14. Мельников О.В., В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общей ред. Скорнякова Л.А. Общая алгебра. Т. 1. Серия «Справочная математическая библиотека». – М.: Наука, 1990.
15. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976.

16. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. – М.: Логос, 2002.
17. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
18. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2003.
19. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980.
20. Харари Ф. Теория графов. – М.: УРСС, 2003.
21. Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления», Т. 11. Итоги науки и техники, – М.: ВИНИТИ, 1986.

Предметный и именной указатель