

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

А.В. КОРЕЦКИЙ, Н.В. ОСАДЧЕНКО

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ НА ПЕРСОНАЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРЕ**

Методическое пособие  
по курсам

“Механика” и “Теоретическая механика”

для студентов, обучающихся по направлениям “Энергомашиностроение”,  
“Прикладная механика”, “Теплоэнергетика”, “Электроэнергетика”,  
“Электротехника, электромеханика и электротехнологии”

УДК

531

К 664

УДК: 531/534: 681.322 – 181.4 (072)

*Утверждено учебным управлением МЭИ*

Рецензенты докт. техн. наук проф. А.Д. Трухний

канд. техн. наук доц. В.Г. Москвин

*Подготовлено на кафедре теоретической механики и мехатроники*

**Корецкий А.В., Осадченко Н.В.**

Решение задач кинематики на персональном компьютере: Методическое пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2004. – 48 с.

Излагается методика выполнения индивидуального домашнего задания и типового расчёта по разделу “Кинематика” курса механики в классах персональных компьютеров. Дается описание обучающей программы **robby2** по кинематике плоскопараллельного движения системы твёрдых тел. Приводятся примеры решения задач.

Для студентов всех специальностей, изучающих курсы “Механика” и “Теоретическая механика”.

## ВВЕДЕНИЕ

К числу основных отличительных тенденций, характерных для развития современного общества, относится быстрое увеличение объёма накопленной им и реально используемой информации. Возрастание того объёма информации, который необходим квалифицированному специалисту в его профессиональной деятельности, предъявляет жёсткие требования к организации образовательного процесса в техническом университете.

В современных условиях вузовское образование должно ориентироваться не только на усвоение студентом определённого объёма информации, но и на развитие у будущего инженера склонности и способности к творческому мышлению, что позволит ему успешно адаптироваться к быстро изменяющимся требованиям практики. Такое мышление опирается на умение самостоятельно строить и использовать математические и физические модели объектов и явлений реального мира.

Важнейшее значение в формировании у будущего специалиста данных качеств имеет *теоретическая механика* – фундаментальная дисциплина физико-математического цикла, которая служит своеобразным мостом между основными разделами высшей математики и остальными дисциплинами – как общетехническими, так и специальными. Она играет роль звена, связывающего в сознании студента мир абстрактных понятий математики с миром реальных объектов – машин, конструкций, приборов.

Основное значение теоретической механики заключается даже не в том, что она является базой для изучения всех общетехнических наук: сопротивления материалов, основ конструирования машин, материаловедения, гидро- и газодинамики, а также многих специальных курсов; ещё важнее, что именно в рамках теоретической механики студенты получают возможность практического применения общих понятий математики и физики к исследованию реальных систем, впервые учатся самостоятельно работать с замкнутыми моделями таких систем, квалифицированно применяя для исследования основные алгоритмы высшей математики.

Достигнутый современными персональными компьютерами технический уровень (относительно высокое быстродействие, наличие цветных дисплеев с высокой разрешающей способностью, развитое программное обеспечение) позволил создать для ряда разделов курса теоретической механики *обучающие программы* с достаточно широкими возможностями.

В методическом пособии описаны возможности обучающей программы **robby2** и методика её использования при изучении кинематики плоскопараллельного движения системы твёрдых тел.

Данная обучающая программа является модифицированной и усовершенствованной версией своей предшественницы – программы **robby** [1]. Она разрабатывалась параллельно с автоматизированной обучающей системой СТЕВИН [2], включающей учебный материал по статике плоской системы сил (скорее всего, Вам уже приходилось иметь дело с этой системой, изучая статику).

Порядок работы с обеими программами, имеющиеся сервисные возможности, особенности дизайна во многом сходны, так как они используют единое в своей основе инструментальное программное обеспечение, созданное в ходе их реализации.

Поэтому здесь не будут подробно рассматриваться правила набора аналитических выражений, работа с подсистемой КАЛЬКУЛЯТОР и т.п. (вся эта информация достаточно полно изложена в [2]; доступна она и в ходе непосредственной работы с обучающей программой – в режиме “помощь”).

Программа **robby2** реализована на персональных компьютерах класса РС IBM. Основное её назначение – помочь студенту выполнить задание типового расчёта по кинематике управляемого движения трёхзвенного манипулятора, а также проверить результаты, полученные им при выполнении индивидуального домашнего задания по кинематике. Она позволяет студенту также потренироваться в решении простейших задач кинематики.

Программа **robby2** гарантирует индивидуальную работу с каждым студентом, позволяя ему выполнять задание в естественном темпе и с использованием общепринятых обозначений. Применяя средства компьютерной графики (в частности, осуществляя визуализацию процесса движения механических систем), программа позволяет обучающемуся легче (и глубже) понять постановку задачи и адекватно интерпретировать результаты, получаемые в ходе её решения.

## 1. Общие сведения об обучающей программе **robby2**

### 1.1. Кинематика? – нет проблем (о назначении программы)

Если Вы склонны считать, что теоретическая механика – сухой и нудный предмет, имеющий весьма косвенное отношение к Вашей повседневной жизни; если у Вас при одной мысли о необходимости идти на семинар по механике начинает болеть голова; если Вы никак не можете осознать, как же будет двигаться на самом деле механизм, чертёж которого Ваш преподаватель старательно рисует мелом на доске; если... – то программа **robby2** развеет Ваши предубеждения и сделает для Вас механику простой, живой и наглядной!

Обучающая программа **robby2** предназначена для использования в рамках курса теоретической механики при изучении кинематики (соответствующий учебный материал отвечает теме “Плоское движение твёрдого тела” в учебнике [3]). Она помогает студенту освоить два основных способа решения задач кинематики плоского движения: аналитический, базирующийся на методе *кинематических графов* [4,5], и геометрический – с использованием метода *мгновенных центров скоростей* (МЦС) [3].

С помощью программы **robby2** можно:

1) потренироваться в решении простых (*тестовых*) задач кинематики плоскопараллельного движения твёрдого тела, ориентированных на отработку и закрепление навыков построения и использования мгновенных центров скоростей;

2) получить численные данные для *индивидуального домашнего задания* (ИДЗ) по кинематике плоского движения и проверить правильность ответов, полученных в результате решения;

3) выполнить задание *типового расчёта* (ТР) по моделированию управляемого движения робота-манипулятора.

При этом Вам не придётся долго всматриваться в не слишком-то наглядные картинки на страницах потрёпанного задачника: на экране видеомонитора Вы уви-

дите цветное изображение механизма с чёткими контурами всех деталей. А после того, как Вы прочтёте текст условия задачи (весьма лаконичный) и нажмёте клавишу **Enter**, механизм “оживёт” и Вы сможете наблюдать на экране весь процесс его движения: куда и с какой скоростью перемещаются те или иные его точки, в какую сторону поворачиваются различные звенья механизма. В общем, Вы увидите, как техника компьютерной мультипликации возвращает механике непосредственную наглядность, скрытую ранее за абстрактностью используемого формально-го аппарата и сложностью математических выражений.

Легче будет Вам и находить ошибки в своих решениях. В ходе решения тестовой задачи, например, Вам придётся отвечать на конкретные вопросы программы; при этом она распознает правильный ответ, введённый в любой форме, и тут же проинформирует Вас о наличии ошибки, если только очередная введённая Вами формула оказалась неверной (вспомните, как долго подчас приходилось Вам искать ошибку, когда Вы обнаруживали, что Ваш ответ не совпадает с приведённым в задачнике...). А если Вы допустите ошибку в задании по кинематике робота-манипулятора, то её наличие тут же скажется на движении робота: схват оторвётся от манипулятора, ползун или ролик также начнут двигаться независимо, возникнут резкие колебательные движения звеньев и т.п. (механизм “рассыплется”).

В учебном процессе в настоящее время применяется версия 1.2 программы **robby2**; излагаемый в данном пособии материал соответствует именно этой версии. Поскольку работа над совершенствованием обучающей программы продолжается, то та версия, с которой встретитесь Вы, будет, возможно, располагать дополнительными возможностями. Информация о них будет внесена в справочник по обучающей программе, обратиться к которому Вы сможете из любого меню программы, нажав функциональную клавишу **F1** (*помощь*).

Обучающая программа **robby2** может быть использована как во время аудиторных занятий по теоретической механике, так и при самостоятельной подготовке студентов.

## 1.2. Входим и выходим... (о том, как начать и завершить работу с обучающей программой)

Чтобы воспользоваться услугами программы **robby2**, нужно иметь доступ к персональному компьютеру, совместимому с компьютерами семейства PC IBM. Предварительно рекомендуется запастись одним-двумя листками бумаги и авторучкой, которые потребуются в процессе работы для выполнения несложных выкладок (надобности иметь при себе микрокалькулятор нет, поскольку в состав обучающей программы входит встроенный калькулятор, и при работе с числовыми данными задания Вы сможете вызвать его, нажав функциональную клавишу **F2**).

Предполагается, что исполнимый файл программы **robby2**, носящий имя **robby2.exe**, записан в одном из каталогов жёсткого диска. Тогда для вызова программы следует запустить этот файл на выполнение, что можно сделать как непосредственно из системы **Windows**, так и при помощи какой-либо из программ-оболочек типа программы **Norton Commander** [6], предназначенных для выполнения приложений DOS.

Заметим, что программа **robby2** для своей работы не требует наличия в текущем каталоге каких-либо дополнительных файлов, за исключением файла данных с названием **robby2.cfg** (он определяет параметры используемой конфигурации обучающей программы). К другим каталогам программа не обращается.

После того, как программа **robby2** загружена, на экране видеомонитора появляется *основное меню* обучающей программы.

Работая с данной обучающей программой, Вы ещё не раз встретитесь с различного вида меню. Эти меню позволят Вам осуществлять *множественный выбор*, т.е. выбирать какую-либо определённую возможность из предложенного конечного набора таковых.

Всякий раз, встретившись с меню программы **robby2**, Вы будете видеть на экране набор прямоугольных полей (соответствуют пунктам меню), одно из которых является активным и отличается от других полей своим цветом. Своим внешним видом поля меню напоминают прямоугольные кнопки на панели управления какой-либо технической системы, а цветовое выделение активного поля имитирует подсветку кнопки.

Используя клавиши управления курсором (клавиши ←, ↑, ↓, →, **Home** и **End** на клавиатуре), можно активизировать любой из пунктов меню. Нажатием же клавиши **Enter** Вы информируете программу о том, что выбран конкретный пункт меню (а именно тот, который в данный момент является активным). Сразу вслед за нажатием клавиши **Enter** “кнопка” на короткое время “утапливается”, имитируя нажатие кнопки на реальной панели управления.

Основное меню программы **robby2** содержит три пункта: “**Индивидуальное домашнее задание**”, “**Типовой расчёт**” и “**Завершение работы**”. Используя клавиши ← и →, можно выбрать любой из них. В частности, для выхода из обучающей программы Вам следует выбрать последний пункт меню (надеемся, что Вы *не будете* делать это сейчас; эта возможность потребуется Вам тогда, когда Вы полностью справитесь со своей задачей и вновь вернётесь в основное меню программы).

Если Вы завершаете работу с обучающей программой и перед этим выполняли задание ТР по моделированию движения манипулятора, то программа спросит, хотите ли Вы сохранить свои данные? Если Вы ответите отрицательно, то выполнение программы завершится. Если же ответ будет утвердительным, то программа попросит Вас ввести имя рабочего файла, в который она и запишет Ваши данные (и тогда, придя в следующий раз в класс персональных компьютеров, Вы сможете, воспользовавшись этим файлом, избежать необходимости заново вводить с клавиатуры все численные данные и расчётные формулы).

Заметим, что если вопрос обучающей программы задан в такой форме, что ответом может быть ДА или НЕТ, то для утвердительного ответа (точно так же, как при работе с системой СТЕВИН [2]) достаточно ввести (в любом регистре) одну из следующих литер: **Д** (да), **Y** (yes) или **J** (ja, jes). Утвердительным ответом является также нажатие клавиши **Enter**. Для отрицательного ответа Вам следует набрать **Н** (нет) или **N** (no, nein, ne). Нажатие клавиши **Esc** также является отрицательным ответом.

Существует ещё возможность аварийного завершения работы с обучающей программой; это произойдет в любой момент времени, если только Вы нажмёте комбинацию клавиш **Ctrl-C**, причём аварийное завершение работы программы **robby2** будет сопровождаться звуковым сигналом. Поступать так Вы вправе только с разрешения дежурного преподавателя (например, в случае неустойчивого функционирования аппаратуры и т.п.).

### 1.3. Сквозь тернии – к звёздам! (о решении тестовой задачи)

Если Вы в основном меню обучающей программы **robby2** выберете первый или второй пункт, то программа не сразу предоставит Вам возможность вплотную заняться работой над Вашим ИДЗ или ТР: сперва вступит в действие подсистема входного контроля, которая предложит Вам короткую тестовую задачу.

Решение этой задачи не отнимет у Вас много времени (в ней речь пойдёт о движении простого механизма или даже одного твёрдого тела), так что не думайте, что Вам придётся “рыть окопы и готовиться к затяжной позиционной войне”. Однако отнеситесь к задаче входного контроля с должным вниманием: до тех пор, пока Вы не ответите на все тестовые вопросы, двинуться дальше Вы не сможете. Любая попытка отказаться от ответа, нажав клавишу **Esc** (или какую-либо другую клавишу), будет блокироваться программой.

Основная цель входного контроля: выявить студентов с недостаточным уровнем подготовки и помочь им получить необходимые навыки решения задач кинематики. Кроме того, обучаемому, не имевшему ранее опыта работы с обучающими программами такого типа, даётся возможность адаптироваться к новым для него условиям, а одновременно – освоиться со способом задания информации, используемым в обучающей программе, и попрактиковаться с вводом формул. (Если же студент, уже работавший ранее с программой **robby2**, испытывает серьёзные затруднения при решении задачи входного контроля, то это, как правило, говорит о том, что он просто не в форме, и тогда он сам должен решить, что лучше: или усилием воли настроить себя на внимательную работу, или отложить работу с компьютером на другой раз.)

Тестовые вопросы рассчитаны на то, что Вы используете *геометрический способ* решения задач кинематики плоского движения. (Если Вы не слишком уверенно владеете этим способом, то Вам рекомендуется перед началом решения тестовой задачи заглянуть в справочник по обучающей программе и освежить в памяти материал, связанный с понятием МЦС.)

Саму тестовую задачу программа выбирает случайным образом. Общее число тестовых задач в версии 1.2 программы **robby2** равно 26 (поэтому вероятность того, что студент, сидящий за соседним компьютером, получит ту же задачу, что и Вы, весьма мала).

Работу над тестовой задачей рекомендуется начинать с внимательного изучения её постановки. Первый кадр, который будет представлен Вашему вниманию, всегда будет включать две панели: с рисунком на левой и текстом условий задачи на правой. После того, как Вы прочтёте условия и нажмёте клавишу **Enter**, на правую панель вместо текста будет выведено изображение, идентичное показанному на левой панели (это – *начальная конфигурация* механизма), а затем по нажатию какой-либо клавиши на правой панели будет продемонстрирован процесс движения механизма. Движение на экране осуществляется достаточно медленно, так что Вы успеете проследить за движением не только системы в целом, но и её отдельных точек.

Задаваемые Вам в дальнейшем тестовые вопросы будут относиться либо к начальной конфигурации механизма (левая панель), либо к конечной (правая панель). Внимание: как только процесс движения на экране завершится, программа сообщит Вам о том, с какой конфигурацией Вам придётся работать; запомните это! После нажатия клавиши **Enter** программа задаст Вам первый вопрос.

Если Вы не можете в уме найти ответ на вопрос, не теряйтесь! (Не смотря на свою простоту, тестовая задача не рассчитана на устное решение.) Возьмите листок бумаги, перерисуйте эскизно на него изображение с нужной панели и выполните необходимые геометрические построения и аналитические выкладки. Полученный ответ наберите на клавиатуре, пользуясь теми же правилами ввода аналитических выражений, что и при работе с системой СТЕВИН [2]. Встретившись с каким-либо затруднением при наборе выражения, Вы можете прямо в ходе набора нажать клавишу **F1** и получить интересующую Вас информацию из справочника по обучающей программе, а затем продолжить ввод выражения.

Введённое Вами выражение программа **robby2** анализирует дважды. Сначала она проверяет синтаксическую корректность записи выражения и, обнаружив ошибку, просит Вас исправить её. Если выражение оказалось синтаксически корректным, то программа запрашивает подтверждение на правильность введённого выражения (здесь Вы ещё можете передумать); получив таковое, программа анализирует уже содержательную правильность предложенного ответа и сообщает Вам свою оценку. Если Вы ошиблись, то Вам предстоит вновь (но уже правильно) ответить на поставленный вопрос; получив же правильный ответ, обучающая программа выводит свой вариант ответа на нижнюю панель и задаёт затем очередной вопрос.

После того, как Вы ответите на все вопросы входного контроля, обучающая программа поздравит Вас с этим достижением. Теперь, нажав клавишу **Enter**, Вы получите на экране видеомонитора меню для ввода параметров ИДЗ или же меню подсистемы моделирования движения роботоманипулятора.

## 2. Пример использования программы **robby2** при выполнении индивидуального домашнего задания по кинематике

### 2.1. Так рождается задача... (о программе синтеза индивидуальных домашних заданий **synkin**)

Каждая из задач, входящих в ИДЗ по кинематике, ставится следующим образом.

*Постановка задачи:* 1) изобразить на чертеже текущую конфигурацию плоского механизма, кинематическая схема и геометрические параметры которого даны; 2) по известному значению угловой скорости звена 1 найти угловую скорость звена 2 и линейную скорость точки  $D$  (задача должна быть решена двумя способами: аналитическим и геометрическим).

Исходные данные для индивидуального домашнего задания Вы (и другие студенты Вашей группы) получите у своего преподавателя. Он объяснит, какой вариант задания выполняет каждый из Вас, и передаст Вам распечатку с принтера персонального компьютера, содержащую таблицу примерно такого вида:

*Кафедра теоретической механики*  
*Индивидуальные домашние задания*  
*по кинематике плоского движения системы тел*  
*для ..... факультета*

Группа .....

*Условие задачи:*

.....

*Исходные данные*

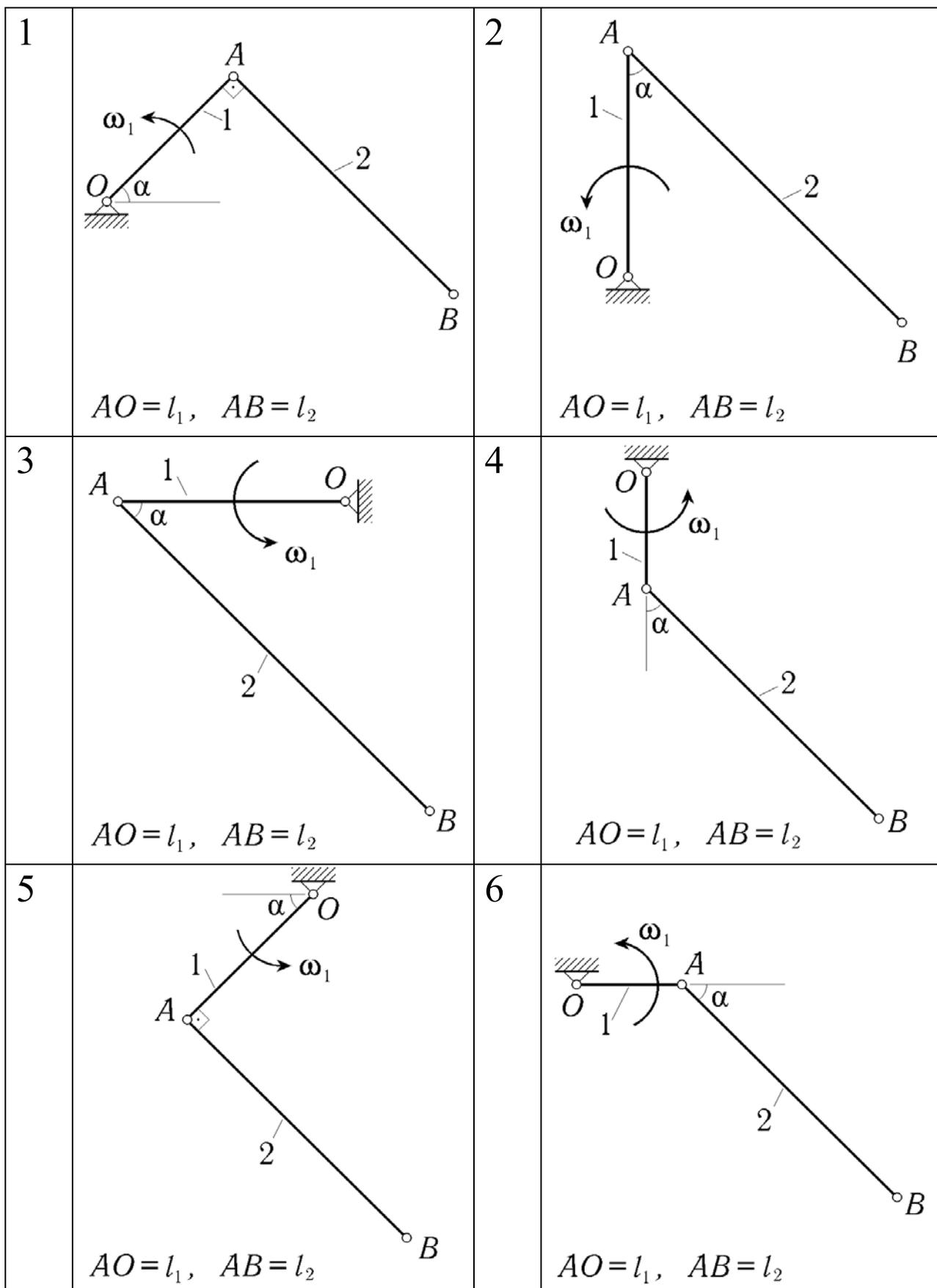
<i>Вар.</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	$\omega_1$	$\alpha$	$\beta$	$L_1$	$L_2$	$R$	$r$
1	8	1	18	33	34	0.40	0.37		
2	4	12	4	55	65	0.22	0.84		
3	11	8	20	20	20	0.46	0.47		
4	10	5	1	12	57	0.21	0.22		
5	7	18	20	35	34	0.58	0.29		
6	9	7	6	26	45	0.78	0.88	0.71	0.69
7	18	15	19	32	42	0.63	0.54		

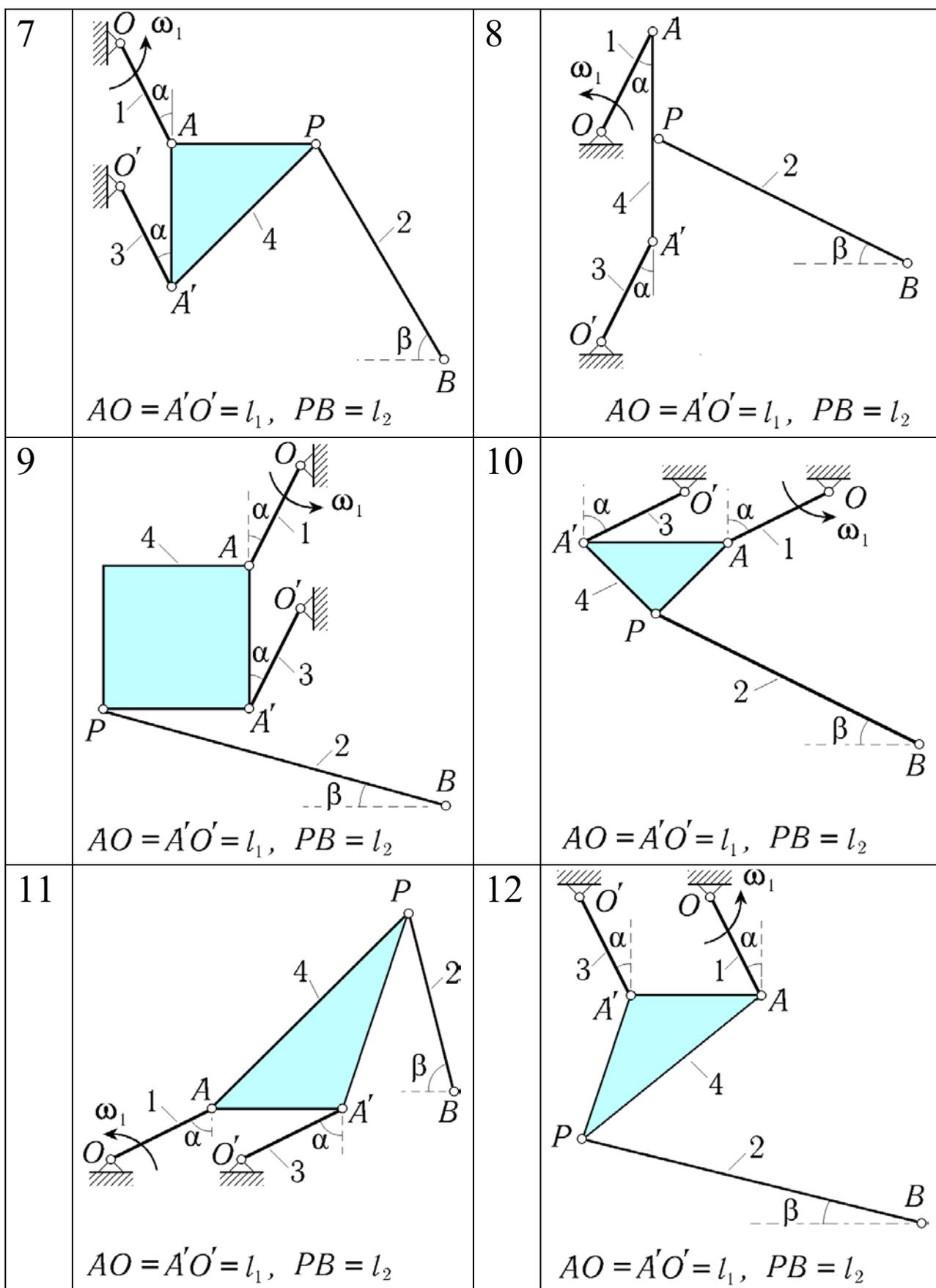
.....

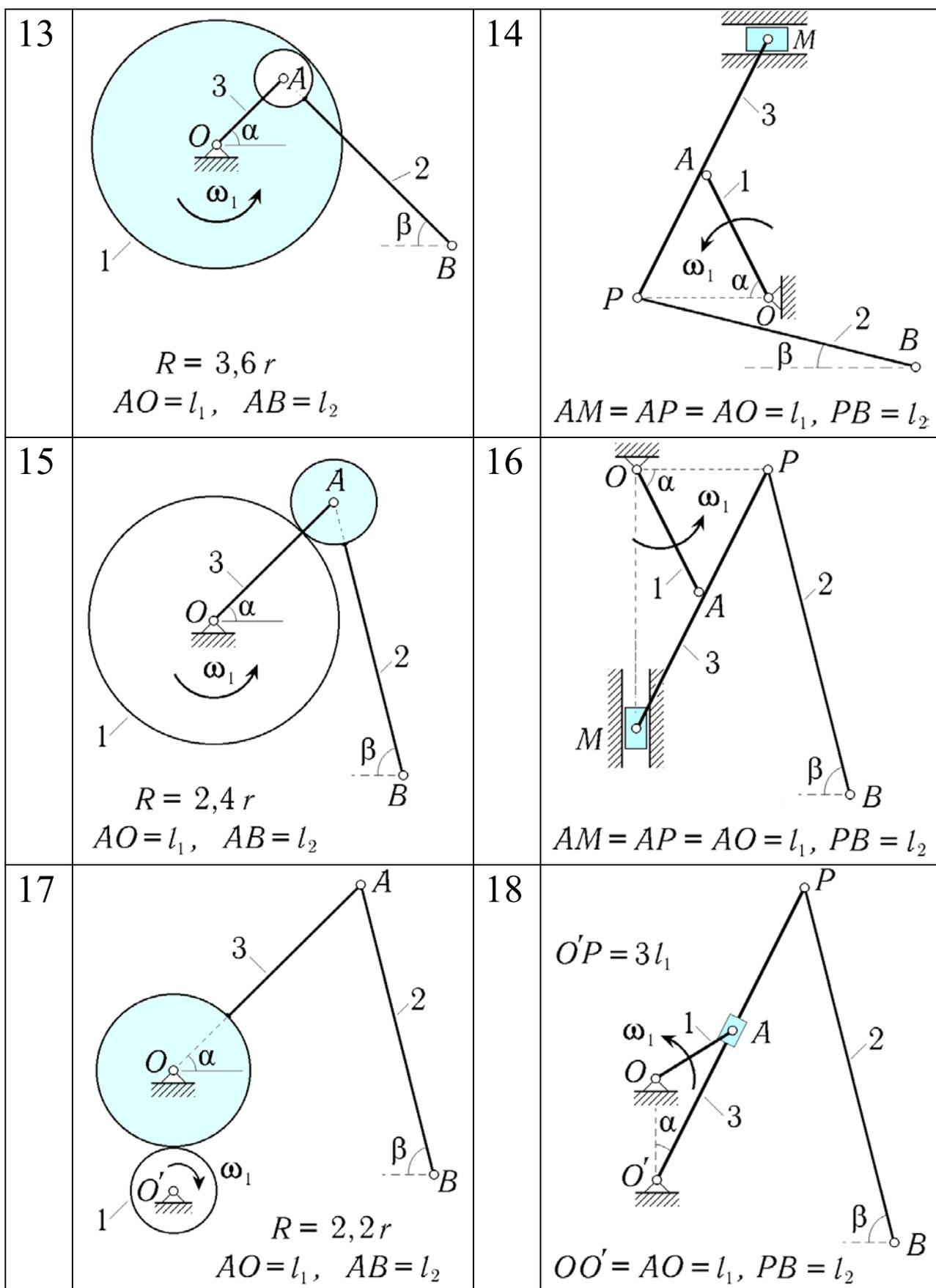
Переписав из таблицы строчку данных для своего варианта, Вам прежде всего следует обратиться к [рис.1–8](#) настоящих методических указаний. Дело в том, что механизм, кинематический анализ которого Вам требуется выполнить, составляется из двух групп тел, условно названных “группа тел **A**” и “группа тел **B**”. Различные кинематические схемы для группы тел **A**, приведённые на [рис.1–4](#), пронумерованы от 1 до 24; кинематические схемы для группы тел **B** ([рис.5–8](#)) также пронумерованы от 1 до 24. Пользуясь приведёнными в распечатке значениями для **A** и **B**, Вы должны найти кинематическую схему для каждой из двух групп тел, а затем совместить (не поворачивая!) обе схемы в общей для них точке **B**; результат совмещения и окажется кинематической схемой Вашего механизма.

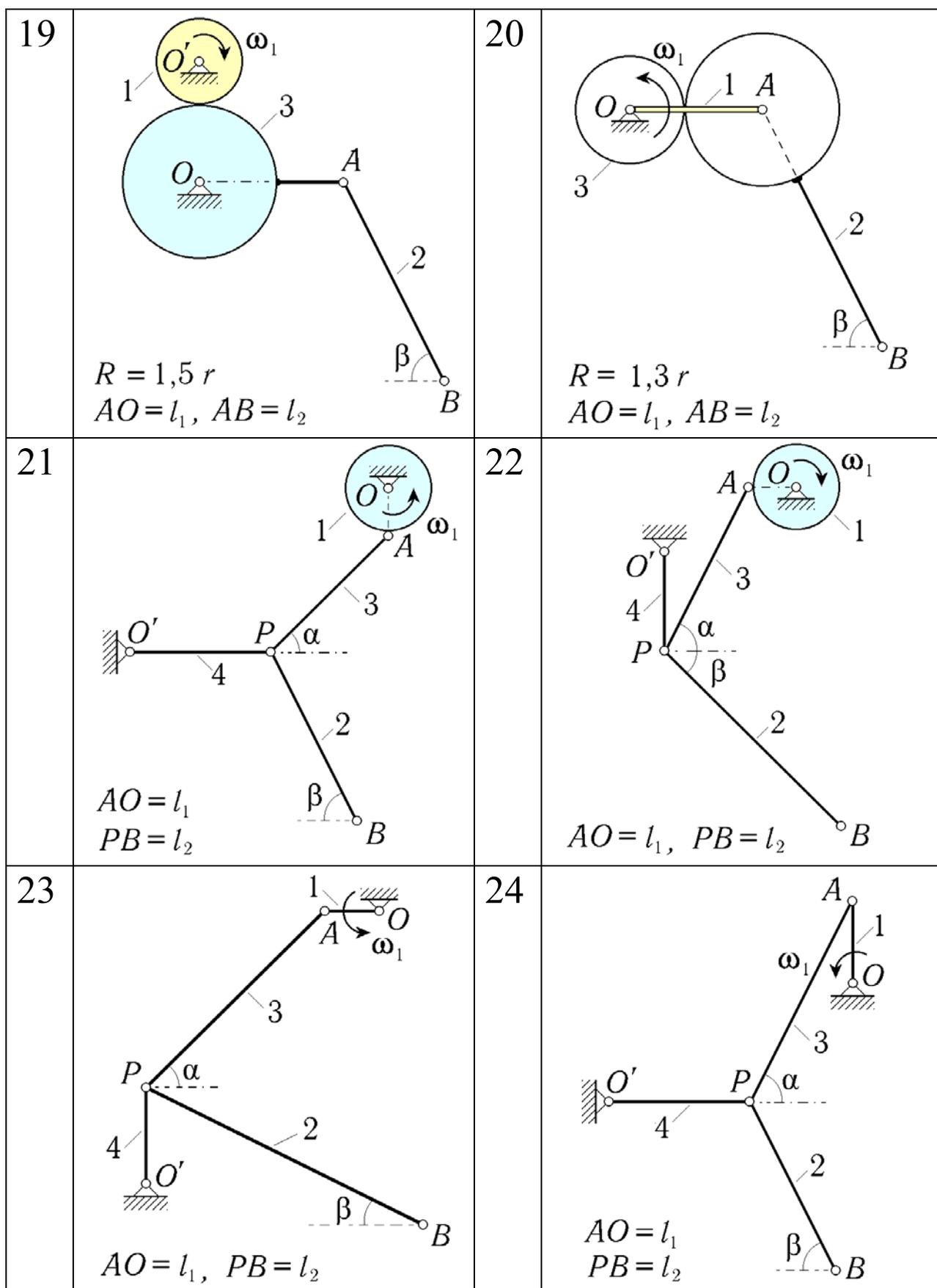
Теперь обратите внимание на приведённые в таблице значения геометрических параметров. Смысл их должен быть ясен из рисунка (если в условии варианта параметр вообще не фигурирует, то в таблице на соответствующем месте стоит пробел); отметим, что значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  даны в градусах, а значения линейных размеров  $L_1$ ,  $L_2$  и радиусов  $R_1$ ,  $r_2$  – в метрах (значение же угловой скорости 1-го звена  $\omega_1$  задано в  $\text{с}^{-1}$ ). Пользуясь этими данными, Вы сможете, выбрав удобный масштаб, изобразить конкретную конфигурацию механизма на чертеже.

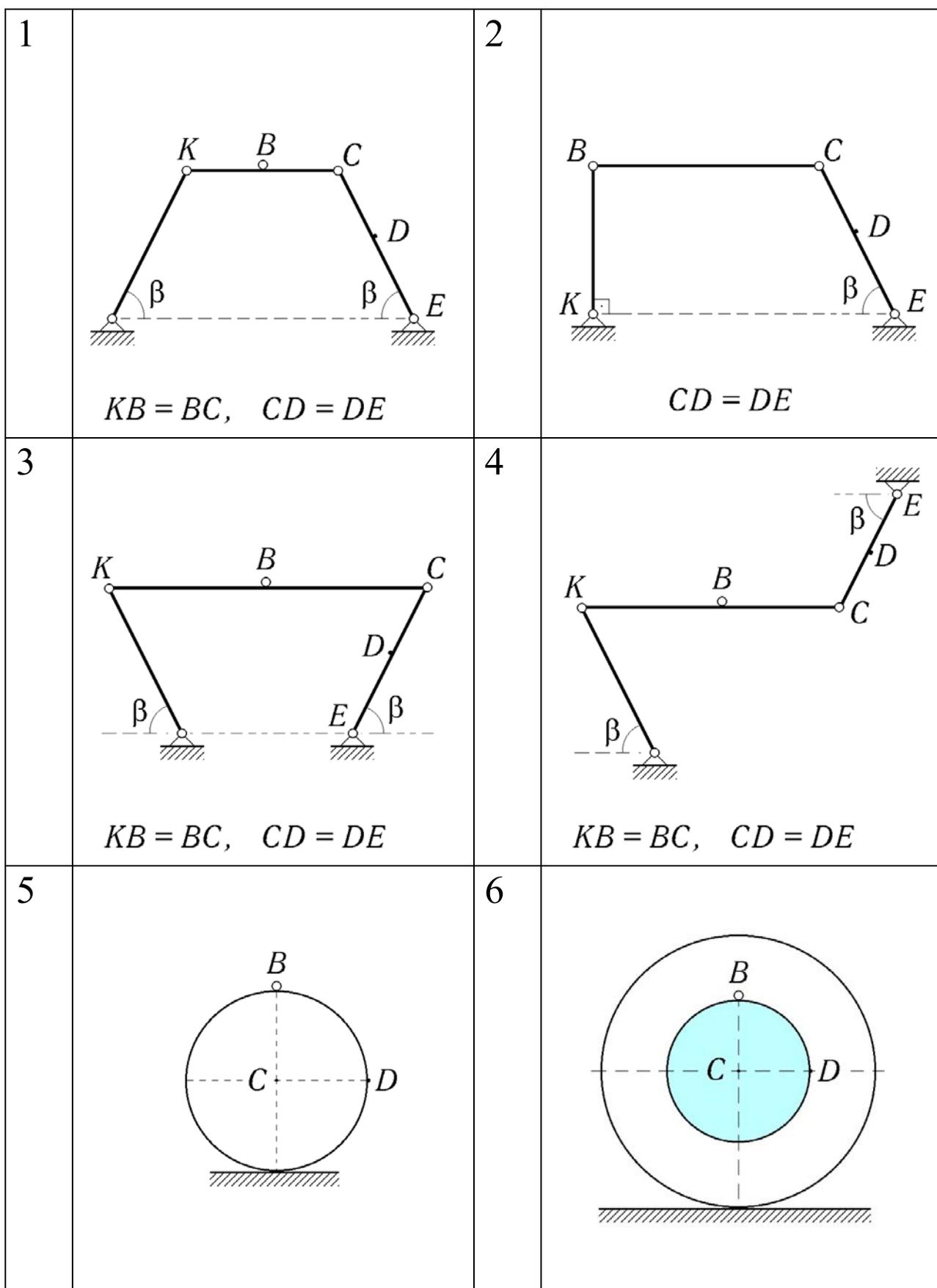
Но откуда взялась распечатка с исходными данными для ИДЗ? Она была подготовлена при помощи программы **synkin**; последняя существует в виде двух модификаций.

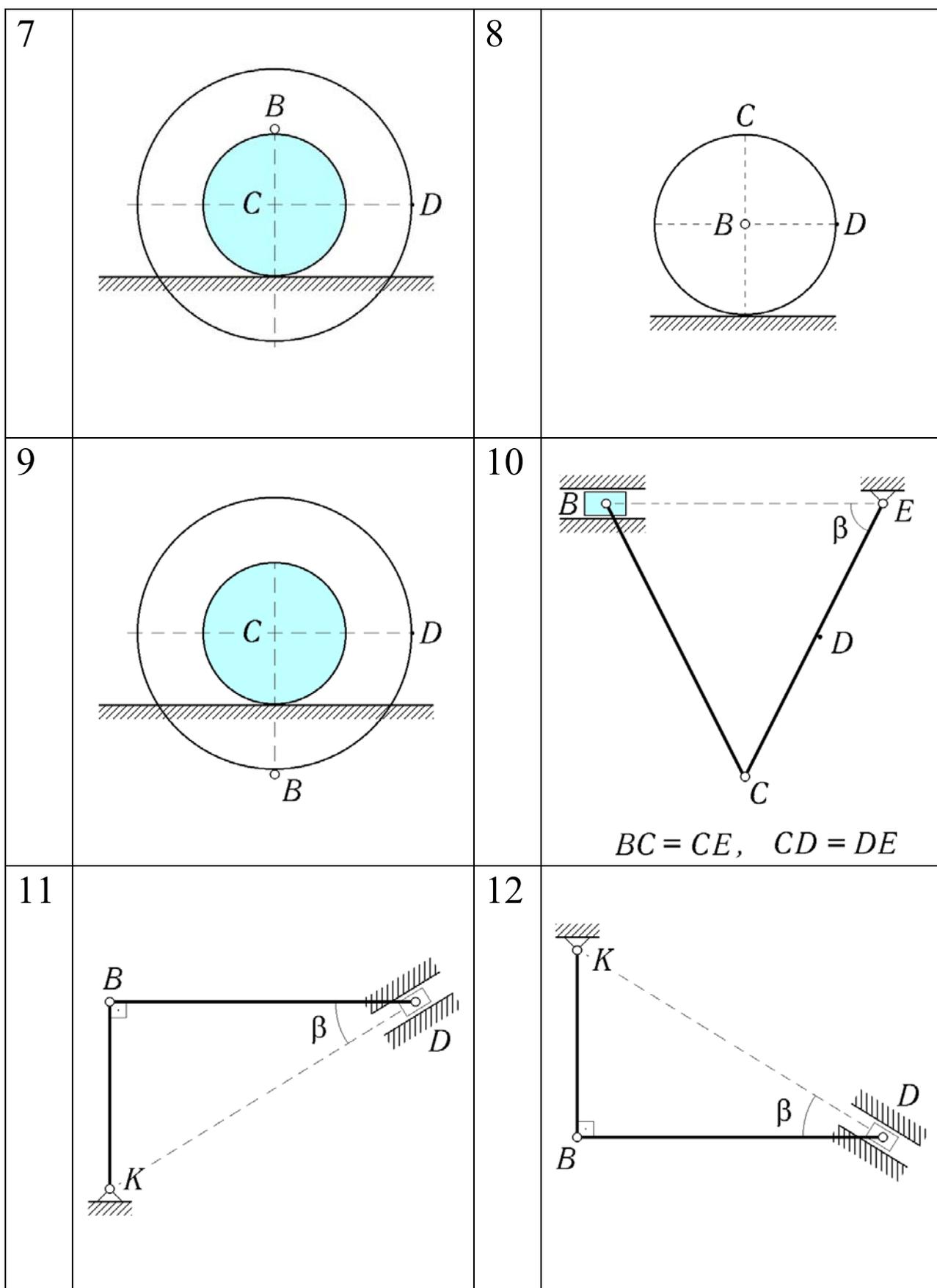
Рис. 1. Группа тел **A** (структурные схемы 1 – 6)

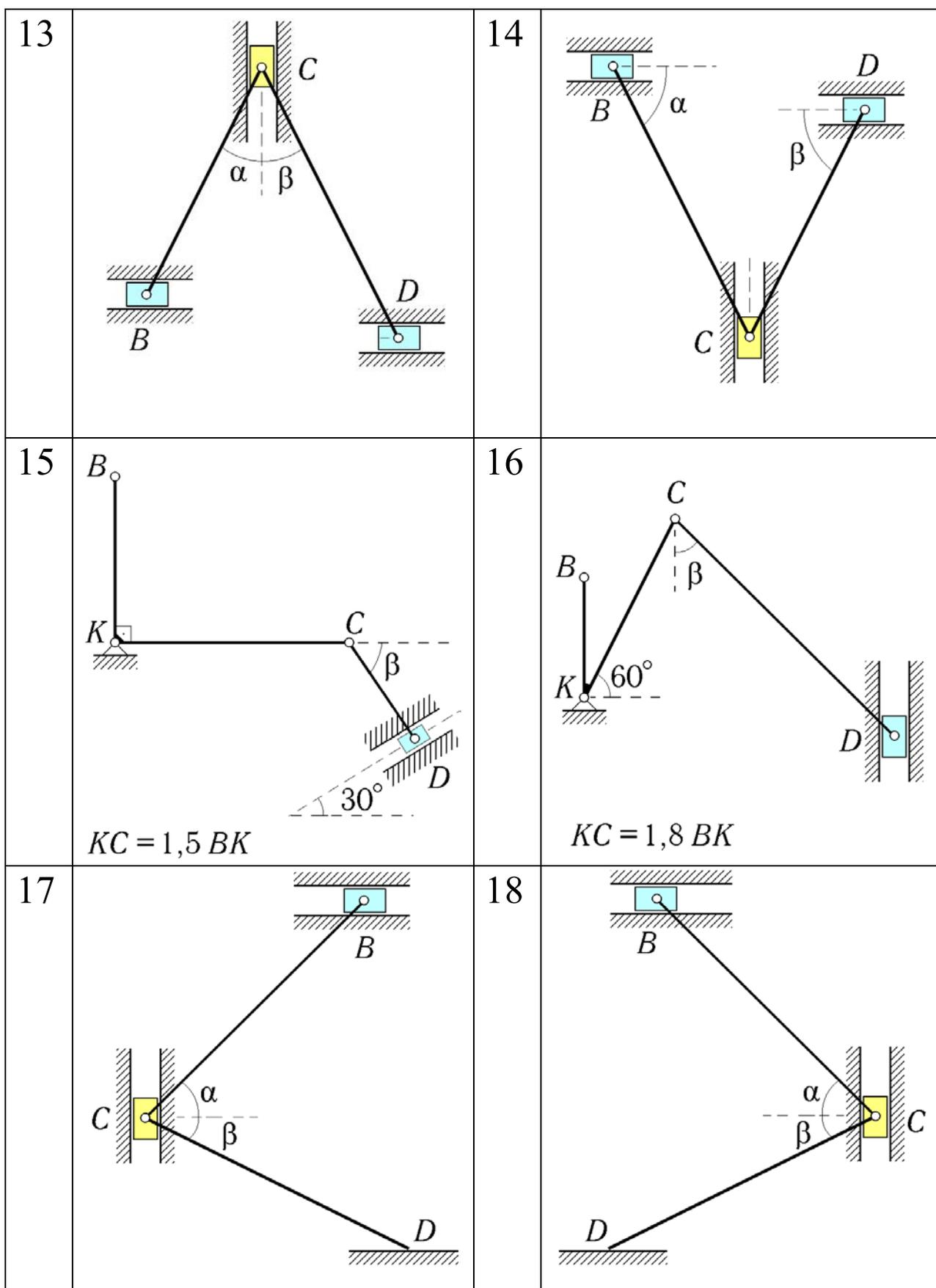
Рис. 2. Группа тел **A** (структурные схемы 7 – 12)

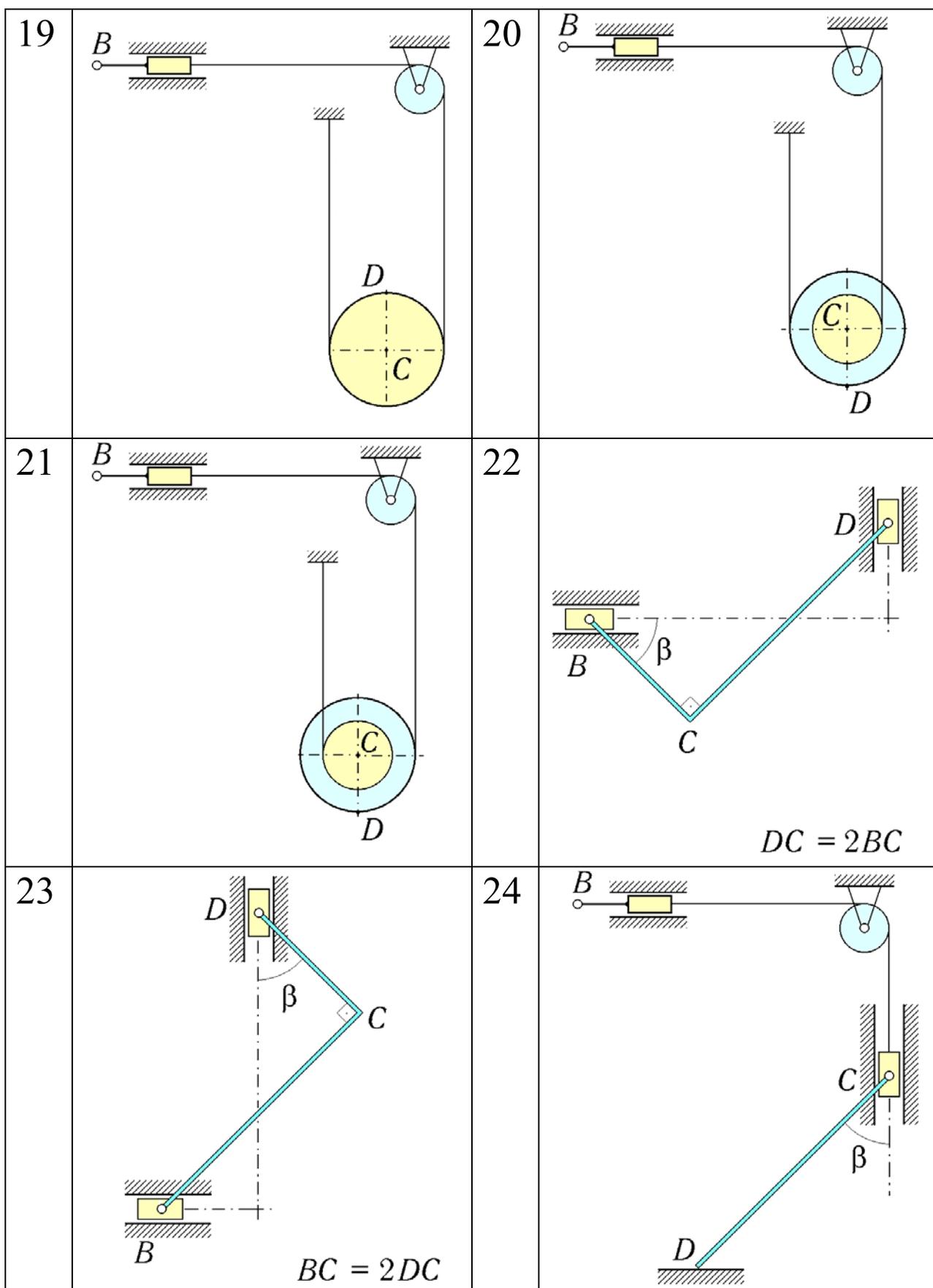
Рис. 3. Группа тел **A** (структурные схемы 13 – 18)

Рис. 4. Группа тел **A** (структурные схемы 19 – 24)

Рис. 5. Группа тел **В** (структурные схемы 1 – 6)

Рис. 6. Группа тел **B** (структурные схемы 7 – 12)

Рис. 7. Группа тел **В** (структурные схемы 13 – 18)

Рис. 8. Группа тел **B** (структурные схемы 19 – 24)

Первая из этих модификаций обеспечивает синтез индивидуальных домашних заданий для студентов различных групп и факультетов; реализована она в виде автономной программы, с которой работают не сами студенты, а преподаватель, ведущий практические занятия в группе. Обращаясь к программе, он указывает номер группы и название факультета, после чего программа осуществляет синтез условий задачи для 30 вариантов ИДЗ и выводит на диск в виде текстового файла таблицу с числовыми данными. Затем при помощи стандартных программ печати этот текстовый файл можно распечатать на принтере в нужном количестве экземпляров.

Сам синтез индивидуальных заданий заключается в следующем. Программа **synkin** случайным образом выбирает для каждого варианта задания номера групп тел **A** и **B** и заносит их в таблицу числовых данных; после этого она (также при помощи генератора случайных чисел) заносит в ту же таблицу численные значения параметров задачи. Число различных кинематических схем для механизмов, которые могут при этом встретиться, равно  $24 \times 24 = 576$ ; с учётом же различных численных значений параметров количество различных синтезированных задач практически неограниченно (т.е. индивидуальность домашнего задания гарантирована).

Вторая модификация программы **synkin** встроена непосредственно в обучающую программу **robby2** и обеспечивает для каждой задачи ИДЗ вывод ответов на экран дисплея (см. конец данного раздела).

## 2.2. Два этюда на одну и ту же тему (пример выполнения индивидуального домашнего задания)

Рассмотрим в качестве примера задачу варианта 7 (см. приведённую выше таблицу исходных данных).

Дано:  $\mathbf{A} = 18$ ,  $\mathbf{B} = 15$ ;  $\omega_1 = 19 \text{ с}^{-1}$ ;  $\alpha = 32^\circ$ ;  $\beta = 42^\circ$ ;  $AO = OO' = L_1 = 0,63 \text{ м}$ ;  $PO' = 3L_1$ ;  $PB = L_2 = 0,54 \text{ м}$ ;  $CK = 1,5BK$ .

Возьмём 18-ю кинематическую схему для группы тел **A** (рис.3) и 15-ю схему для группы тел **B** (рис.7), и совместим эти схемы в общей точке **B**, получив тем самым единый механизм (рис.9). При этом перенумеруем (номерами 3, 4, 5) те его звенья, которые ранее номеров не получили.

### Аналитическое решение.

При решении задач кинематики плоского движения аналитическим способом можно придерживаться следующей *последовательности действий*:

- 1°. Выбрать кинематический граф, с которым связано не более двух неизвестных величин (линейных и угловых скоростей).
- 2°. Составить кинематические соотношения для выбранного графа.
- 3°. Учесть связи в концевых точках графа.
- 4°. Решить полученные кинематические уравнения.
- 5°. Если не все неизвестные найдены, вернуться к пункту 1°.

В качестве первого кинематического графа возьмём граф

$$O' \xrightarrow[\varphi_3]{3} A^* \xrightarrow[\varphi_1]{1} O .$$

Здесь  $\varphi_3 = 90^\circ - \alpha$ ,  $\varphi_1 = 3\pi/2 - 2\alpha$ .

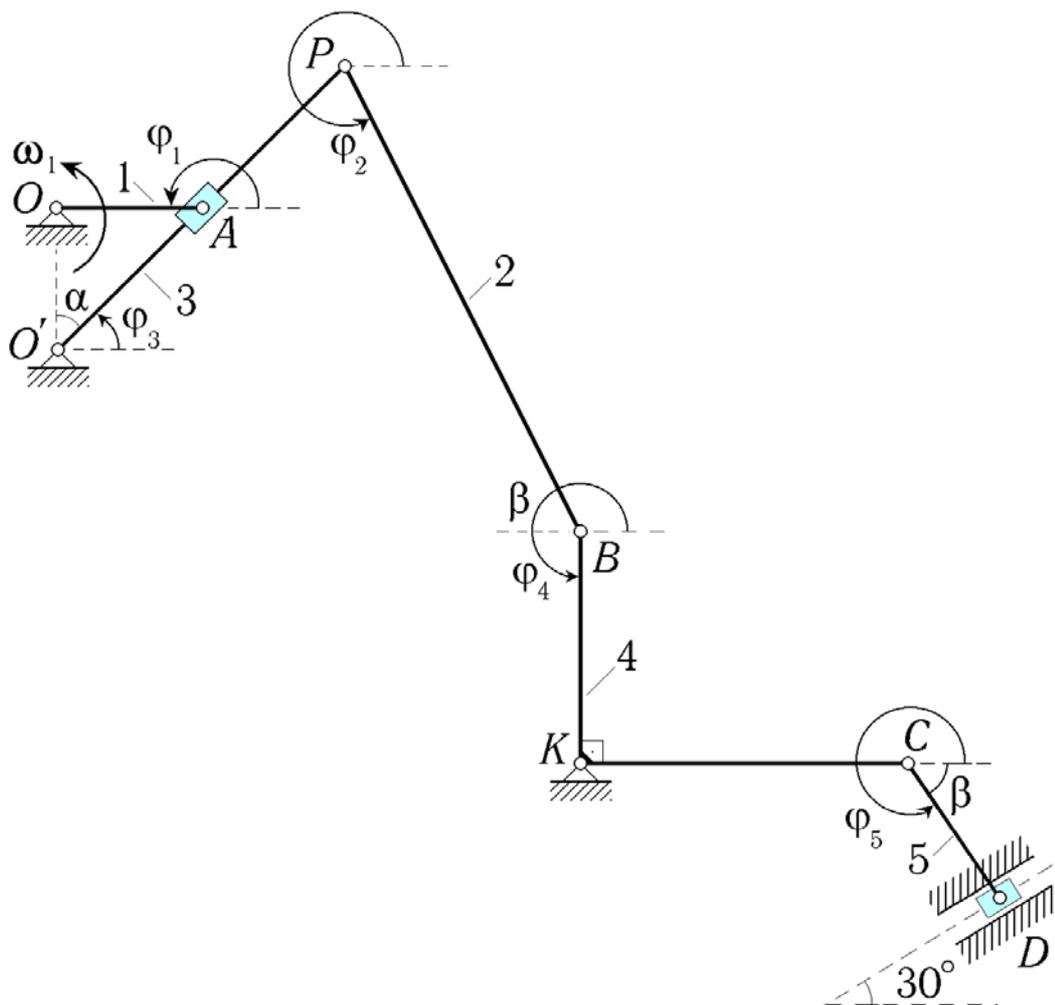


Рис. 9. Кинематические углы для аналитического решения задачи ИДЗ

Точку  $A$  мы поместили звёздочкой, чтобы подчеркнуть тот факт, что ползун движется относительно стержня  $O'P$ . Наличие такого относительного движения приводит к дополнительным слагаемым в составленных по графу уравнениях.

Составим кинематические уравнения для этого графа, учитывая при этом условия связей  $v_{Ox} = 0$ ,  $v_{Oy} = 0$ ,  $v_{O'x} = 0$ ,  $v_{O'y} = 0$ :

$$0 = -\omega_{3z} L_O \sin \varphi_3 + v_A^* \cos \varphi_3 - \omega_{1z} L_1 \sin \varphi_1, \quad (1)$$

$$0 = \omega_{3z} L_O \cos \varphi_3 + v_A^* \sin \varphi_3 + \omega_{1z} L_1 \cos \varphi_1. \quad (2)$$

Здесь  $L_O = 2L_1 \cos \alpha$ , а  $v_A^*$  – проекция скорости ползуна  $A$  относительно стержня  $O'P$  на сам этот стержень.

В уравнения (1) и (2) вошли две неизвестные величины:  $\omega_{3z}$  и  $v_A^*$ ; последняя в дальнейших выкладках не участвует, так что разумно сразу же исключить её, домножая уравнение (1) на  $\sin \varphi_3$ , уравнение (2) – на  $\cos \varphi_3$ , и вычитая из второго уравнения первое.

Получаем:  $\omega_{3z} = \omega_{1z}/2$ .

Возьмём теперь новый граф:  $O' \xrightarrow[\Phi_3]{3} P \xrightarrow[\Phi_2]{2} B \xrightarrow[\Phi_4]{4} K$ .

Здесь  $\varphi_2 = 2\pi - \beta$ ,  $\varphi_4 = 3\pi/2$ . Принимая во внимание уравнения связей  $V_{O'x} = 0$ ,  $V_{O'y} = 0$ ,  $V_{Kx} = 0$ ,  $V_{Ky} = 0$  и обозначая  $BK = L_4$ , имеем

$$0 = -\omega_{3z} 3L_1 \sin \varphi_3 + \omega_{2z} L_2 \sin \beta + \omega_{4z} L_4, \quad (3)$$

$$0 = \omega_{3z} 3L_1 \cos \varphi_3 + \omega_{2z} L_2 \cos \beta. \quad (4)$$

Из (4) находим

$$\omega_{2z} = -\frac{\omega_{1z} 3L_1 \sin \alpha}{2L_2 \cos \beta}, \quad (5)$$

а из (3) получаем, что  $\omega_{4z} = (3\omega_{3z} L_1 \sin \varphi_3 - \omega_{2z} L_2 \sin \beta) / L_4$ .

В соответствии с графом  $K \xrightarrow[0^\circ]{4} C \xrightarrow[2\pi - \beta]{5} D$  имеем

$$V_{Dx} = \omega_{5z} L_5 \sin \beta, \quad V_{Dy} = \omega_{4z} 3L_4 / 2 + \omega_{5z} L_5 \cos \beta. \quad (6)$$

Уравнения связи для ползуна  $D$  таковы:

$$V_{Dx} = V_D \cos 30^\circ \equiv V_D \sin 60^\circ, \quad V_{Dy} = V_D \sin 30^\circ \equiv V_D \cos 60^\circ. \quad (7)$$

Здесь через  $V_D$  обозначена проекция скорости точки  $D$  на ось, параллельную направляющим ползуна (она образует угол  $30^\circ$  с осью  $Ox$ ).

Из соотношений (6), (7) получаем, что

$$V_D = \omega_{4z} 3L_4 \sin \beta / (2 \sin (60^\circ - \beta)). \quad (8)$$

Подставляя в (8) выражение для угловой скорости  $\omega_{4z}$ , окончательно находим

$$V_D = 9\omega_{1z} L_1 \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - 60^\circ)} \frac{\cos (\beta - \alpha)}{4 \cos \beta}. \quad (9)$$

*Замечание.* В некоторых вариантах задания на одном из этапов решения не удаётся выбрать граф, с которым связано не более двух неизвестных величин. Тогда приходится рассматривать сразу два графа, решая составленные для них четыре кинематических уравнения как единую систему. Поскольку решить две системы линейных уравнений с двумя неизвестными в каждой значительно проще, чем одну систему с четырьмя уравнениями, рекомендуется так поступать только тогда, когда Вы окончательно убедитесь, что более простой путь решения не проходит.

### Геометрическое решение.

При решении задач кинематики плоского движения геометрическим способом можно придерживаться следующей *последовательности действий*:

- 1°. Подготовить таблицу МЦС.
- 2°. Найти МЦС для всех звеньев, указывая отрезками прямых линий направления линейных скоростей.
- 3°. Показать стрелками, как ориентированы линейные и угловые скорости.
- 4°. Выполнить выкладки, применяя формулу, связывающую модуль линейной скорости точки и модуль угловой скорости тела, которому точка принадлежит.

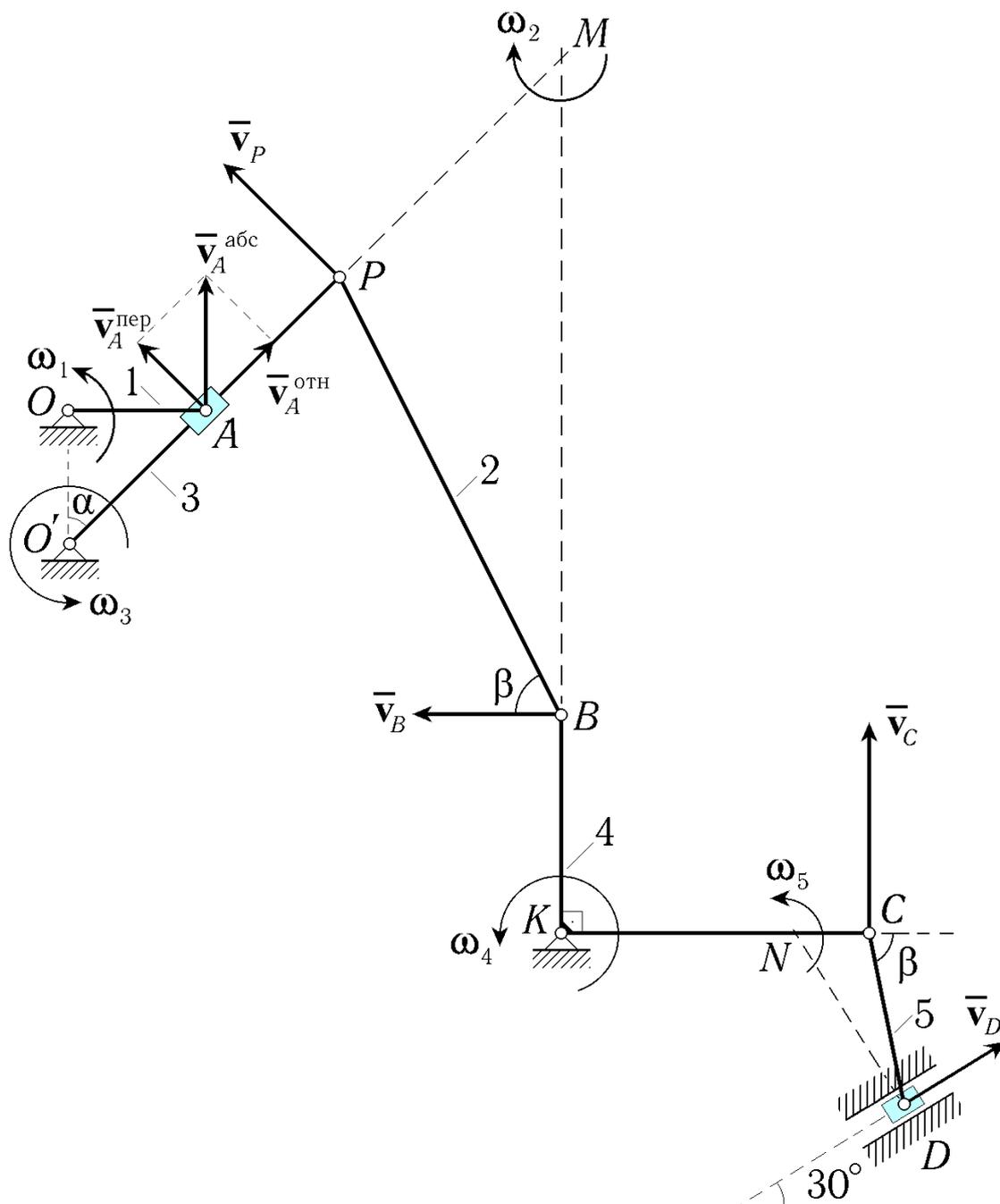


Рис. 10. Мгновенные центры скоростей в задаче ИДЗ

Построим мгновенные центры скоростей (рис. 10).

По поводу выполненных построений заметим, что МЦС для звеньев 1, 3 и 4 мы нашли сразу же (это – неподвижные точки), после чего стали известными направления скоростей точек  $P$ ,  $B$  и  $C$  (они ортогональны направлениям на МЦС звеньев 3 и 4); скорость же точки  $D$  направлена вдоль направляющих ползуна. МЦС для звеньев 2 и 5 были найдены как точки пересечения перпендикуляров к отрезкам, задающим направления линейных скоростей (эти перпендикуляры показаны штриховыми линиями). Все построения основаны на том, что вектор скорости точки тела всегда ортогонален направлению на МЦС этого тела.

Скорость точки  $A$  мы, используя теорему о сложении скоростей, представили в виде суммы относительной скорости  $\bar{v}_A^{\text{отн}}$  и переносной скорости  $\bar{v}_A^{\text{пер}}$ :

$$\bar{v}_A \equiv \bar{v}_A^{\text{абс}} = \bar{v}_A^{\text{отн}} + \bar{v}_A^{\text{пер}}.$$

При этом абсолютная скорость точки  $A$  (которая принадлежит звену  $1$ ) направлена ортогонально направлению на МЦС звена  $1$ , её относительная скорость направлена вдоль стержня  $3$  (с которым связана подвижная система отсчёта). Переносная же скорость точки  $A$  (равная скорости той точки подвижной системы отсчёта, с которой в данный момент времени совпадает точка  $A$ ) направлена ортогонально направлению на МЦС звена  $3$ .

Таблица МЦС: МЦС ( $1$ ) – т.  $O$     МЦС ( $3$ ) – т.  $O'$     МЦС ( $5$ ) – т.  $N$   
 МЦС ( $2$ ) – т.  $M$     МЦС ( $4$ ) – т.  $K$

При расстановке стрелок – для определённости – принято, что звено  $1$ , модуль угловой скорости которого задан в условии, вращается против хода часовой стрелки (т.е. в положительном направлении). Изобразив стрелкой, как ориентирована угловая скорость этого звена, мы затем последовательно показали ориентацию и всех остальных угловых и линейных скоростей (действуя по принципу: по угловой скорости находим линейную, по линейной – угловую).

Результат этих построений представлен на [рис. 10](#) (отрезки прямых линий, задававшие направления линейных скоростей, с рисунка удалены: их заменили векторы этих скоростей).

Переходим к выкладкам.

Записав для модуля линейной скорости точки  $A$  формулу, связывающую его с модулем угловой скорости звена  $1$ , получаем:

$$V_A \equiv V_A^{\text{абс}} = \omega_1 |AO| \equiv \omega_1 L_1.$$

Теперь из параллелограмма скоростей находим:  $V_A^{\text{пер}} = V_A \cos \alpha = \omega_1 L_1 \cos \alpha$ . Учитывая соотношение  $|AO'| = 2L_1 \cos \alpha$ , получаем:  $\omega_3 = V_A^{\text{пер}} / AO' = \omega_1 / 2$ . Для точки  $P$  имеем:

$$V_P = \omega_3 3L_1 = \omega_1 3L_1 / 2. \quad (10)$$

Модуль угловой скорости звена  $2$  можно представить в виде

$$\omega_2 = \frac{V_P}{|PM|} = \frac{V_B}{|BM|}. \quad (11)$$

Таким образом, для вычисления  $\omega_2$  нужно знать длину отрезка  $MP$ ; кстати, из (11) можно получить и значение  $V_B$ , если только известна длина отрезка  $MB$ . Обе эти длины удобно найти по теореме синусов.

По теореме синусов:

$$\frac{|PM|}{\cos \beta} = \frac{|BM|}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{L_2}{\sin \alpha}, \quad (12)$$

так что

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 3L_1 \sin \alpha}{2L_2 \cos \beta}, \quad V_B = \frac{\omega_1 3L_1 \cos(\beta - \alpha)}{2 \cos \beta}. \quad (13)$$

Для звена  $4$  получаем  $\omega_4 = V_C / |CK| = V_B / |BK|$ , откуда

$$V_C = \frac{\omega_1 9L_1 \cos(\beta - \alpha)}{4 \cos \beta}. \quad (14)$$

Значение  $V_D$  можно было бы найти аналогичным способом (используя то, что МЦС звена 5 известен). Однако несколько быстрее приводит к цели теорема о том, что проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны [3] (эту теорему иногда называют *теоремой Грасгофа*).

По теореме Грасгофа,  $\text{пр}_{DC} \bar{v}_C = \text{пр}_{DC} \bar{v}_D$ , то есть  $V_C \sin \beta = V_D \sin (60^\circ - \beta)$ . Отсюда получаем второй ответ задачи:

$$V_D = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - 60^\circ)} \frac{\omega_1 9L_1 \cos (\beta - \alpha)}{4 \cos \beta}. \quad (15)$$

Из (9) и (15) видно, что значения линейных скоростей, полученные аналитическим и геометрическим способами, совпадают; а сравнивая (5) с (13) и учитывая показанное стрелкой на рис.10 направление  $\bar{\omega}_2$ , убеждаемся в совпадении результатов и для угловых скоростей.

### 2.3. И увидел он, что всё хорошо, и возрадовался... (о проверке правильности решения ИДЗ)

Совпадение результатов аналитического и геометрического способов решения задачи, разумеется, весьма серьёзный аргумент в пользу правильности полученных ответов. Однако всё ещё остаётся некая вероятность того, что была допущена ошибка (например, мы могли сделать ошибку, используя в обоих вариантах решения одну и ту же неверную тригонометрическую формулу). Поэтому лучше всего сравнить свои результаты с ответами, которыми располагает сама программа синтеза индивидуальных домашних заданий.

Итак, предположим, что Вы выбрали пункт **“Индивидуальное домашнее задание”** в основном меню программы **robby2** и успешно справились с тестовой задачей на этапе входного контроля. В таком случае на экране видеомонитора перед Вами появляется меню для ввода параметров ИДЗ. В этом меню представлены некоторые (первоначально – произвольные) значения параметров задания (т.е. номера групп тел **A** и **B**, значения  $\omega_1, \alpha, \beta, L_1, L_2, R, r$ ), а слева от каждого значения находится “кнопка” с буквенным обозначением этого параметра.

Ваша задача – активизируя последовательно “кнопки” меню, отвечающие различным параметрам задания, ввести соответствующие численные значения из таблицы исходных данных. В том случае, когда параметр вообще не фигурирует в условии данного варианта, нет нужды менять представленное в меню численное значение.

Закончив работу по вводу численных значений параметров, нажмите функциональную клавишу **F10**. При этом на экране высветится копия строки таблицы числовых данных задачи, а далее будут следовать ответы – искомые численные значения  $\omega_2$  и  $V_D$ . Осталось сравнить их с результатами, полученными дома, и выяснить, можно ли Вам переходить к оформлению задания для сдачи преподавателю на проверку или же следует искать ошибку в своих построениях и выкладках...

После того, как Вы просмотрите ответы (а заодно проверите строку таблицы данных – не было ли ошибки в ходе набора параметров) и нажмёте какую-либо клавишу, на экране появится надпись:

**Закончили ли Вы работу по проверке задания?**

Если Вы на данный вопрос ответите утвердительно, то программа **synkin** завершит работу, и на экране вновь появится основное меню программы **robby2**; в противном случае на экране опять возникнет меню для ввода параметров ИДЗ, и тогда Вы имеете возможность поменять все или часть значений параметров и затем вновь просмотреть полученные результаты (такой повторный выход на меню для ввода параметров нужен, когда выявилась ошибка в набранных значениях параметров или когда Вы получили в рамках ИДЗ несколько задач и проверяете их все).

### 3. Пример выполнения типового расчёта при помощи программы **robby2**

#### 3.1. Схватить деталь? – Всегда готов! (о постановке задачи моделирования движения робота-манипулятора)

В типовом расчёте “Кинематика управления манипулятором” требуется выполнить моделирование управляемого движения робота-манипулятора, представляющего собой плоский механизм с двумя степенями свободы. Кинематические схемы манипуляторов для 30 вариантов, входящих в задание ТР, представлены на [рис. 11–15](#).

**Краткая постановка задачи.** Деталь  $D$ , находящаяся на ленте транспортера, движется по закону:

$$x_D = x_D(0) + [x_D(\tau) - x_D(0)] \frac{\beta_x s}{1 + \beta_x s - s}, \quad (16)$$

$$y_D = y_D(0) + [y_D(\tau) - y_D(0)] \frac{\beta_y s}{1 + \beta_y s - s}, \quad (17)$$

где  $s = t / \tau$  – время (приведённое к безразмерному виду). Требуется, чтобы схват  $M$  манипулятора к моменту  $t = \tau$  был совмещён с деталью с относительной точностью  $\delta$ . Управление манипулятором осуществляется по линейной комбинации рассогласований координат и их производных для точек  $D$  и  $M$ , так что для компонент вектора скорости схвата имеем:

$$V_{Mx} = \dot{x}_M = V_{Dx} + (x_D - x_M) / T^*, \quad (18)$$

$$V_{My} = \dot{y}_M = V_{Dy} + (y_D - y_M) / T^*, \quad (19)$$

где  $T^* = -\tau / \ln \delta$ . Начальная конфигурация манипулятора и параметры, входящие в формулы для  $x_D$  и  $y_D$ , даны.

Определить, как зависят от времени скорость точки  $C$  и угловые скорости  $\omega_{jz}$  звеньев манипулятора.

Обсудим приведённую постановку задачи более подробно.

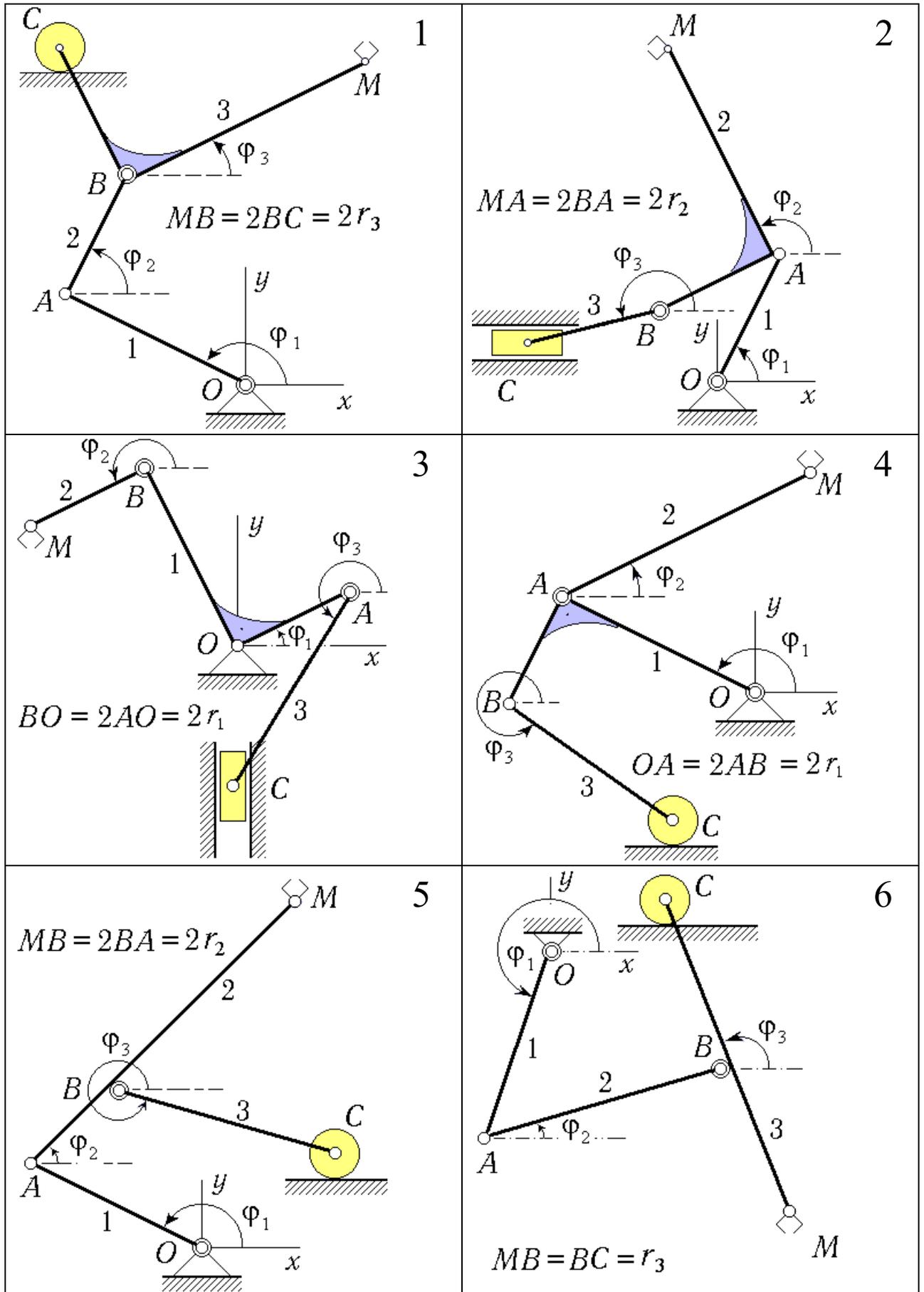


Рис. 11. Кинематические схемы манипуляторов (варианты 1–6)

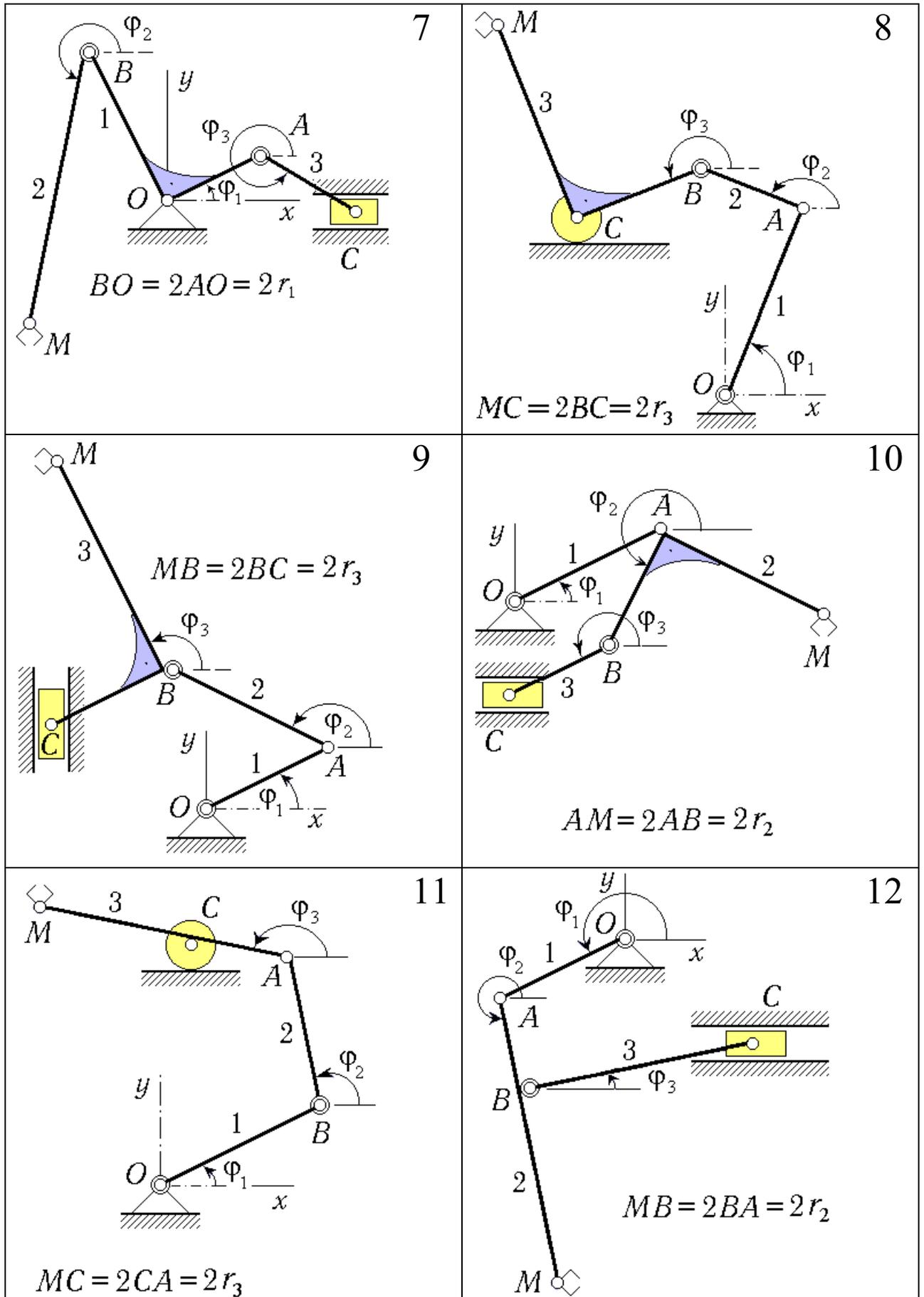


Рис. 12. Кинематические схемы манипуляторов (варианты 7–12)

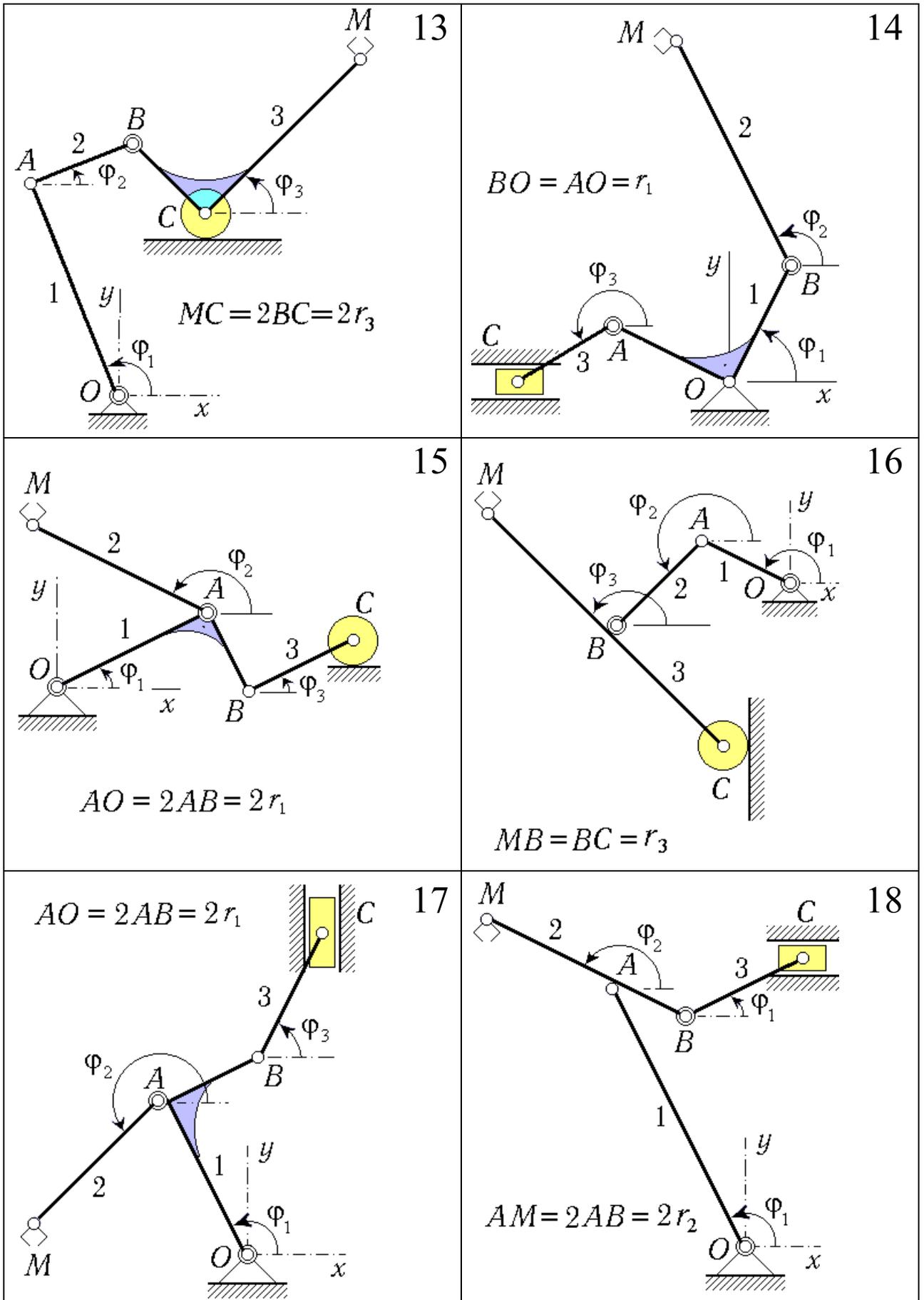


Рис. 13. Кинематические схемы манипуляторов (варианты 12–18)

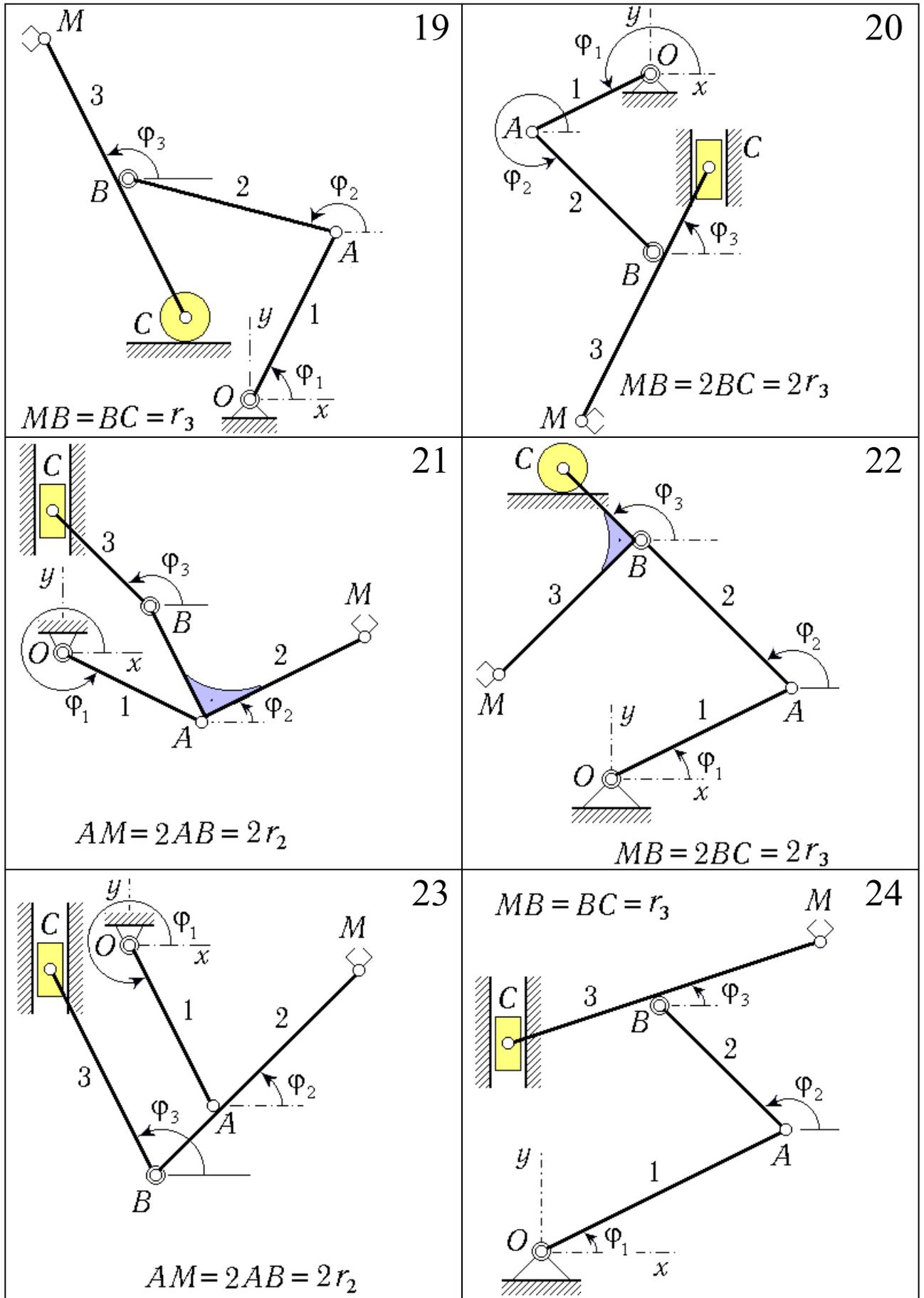


Рис. 14. Кинематические схемы манипуляторов (варианты 19–24)

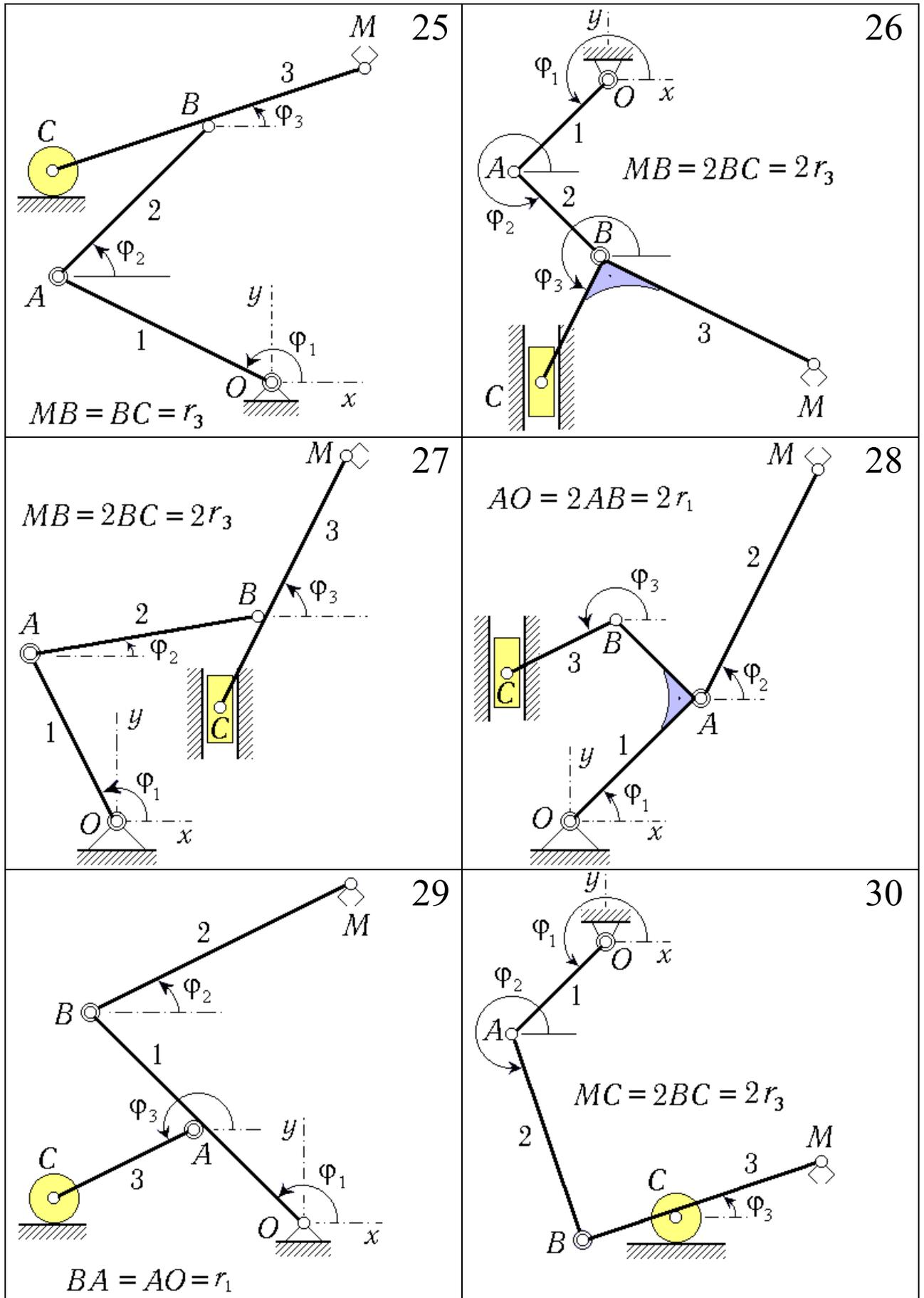


Рис. 15. Кинематические схемы манипуляторов (варианты 25 – 30)

**Манипулятор как управляемая механическая система.** Расширяющееся применение робототехнических систем в производстве, науке и быту знаменует собой выход человеческой цивилизации на принципиально новый технологический уровень. Среди *роботов* (т.е. технических систем, которые в своих действиях имитируют двигательные и интеллектуальные функции человека) выделяются манипуляционные роботы, главное свойство которых – воспроизведение функций человеческих рук в процессе трудовой деятельности [7].

Исполнительным устройством манипуляционного робота является *манипулятор*. Это – многосвязный механизм со многими степенями подвижности. Манипуляторы оснащены захватными устройствами, предназначенными для захвата и удержания объекта манипулирования. Захватное устройство, в котором захват и удержание производится относительным перемещением его частей, называется *схватом* [8].

На [рис. 11–15](#) показаны различные варианты одной из кинематических схем манипулятора. Данный манипулятор имеет две степени свободы и обеспечивает произвольное перемещение схвата (точка  $M$ ) в некоторой области плоскости  $Oxy$ . Состоит манипулятор из трёх подвижных звеньев, соединённых друг с другом и с основанием вращательными шарнирами (точки  $O, A, B$ ). Звено 3 соединено с ползуном  $C$  (в некоторых вариантах его роль играет ролик  $C$ ), движущимся в неподвижных прямолинейных направляющих.

Для реализации программного движения манипулятора используются приводные устройства. На практике применяются различные типы приводов: электрические, гидравлические, пневматические. В состав приводов входят: усилители мощности; исполнительные двигатели; передачи, а также различные датчики. Двигатели могут крепиться как на основании, так и на подвижных звеньях. Управляющие сигналы, подаваемые на приводы, формируются системой управления робота.

Управление манипулятором рассматриваемого типа осуществляется путём прикладывания моментов по осям шарниров  $O$  и  $B$  (это так для большинства вариантов, но встречаются варианты с управлением по осям  $A$  и  $B$ , а также  $A$  и  $O$ ). Такого типа “шарниры” на рисунке изображены двойными кружками.

Далее анализируется одна из технологических операций рассматриваемого манипулятора, предусматривающая совмещение схвата с движущейся деталью  $D$ , которая находится на ленте транспортера. Предполагается, что закон движения детали задан.

Рассматриваемая здесь постановка задачи в основном – такая же, как и в типовом расчёте К-3 из пособия [4]. Основное отличие связано именно с задаваемым законом движения детали. Если в расчёте К-3 (для выполнения которого можно было пользоваться программой **robby**) движение детали было равномерным и прямолинейным, то в расчёте, выполняемом при помощи программы **robby2**, зависимость координат детали от времени задаётся мелко-линейными функциями специального вида (формулы (16)–(17), где  $\tau$  – длительность технологической операции).

Начальная конфигурация манипулятора характеризуется начальными значениями  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\varphi_3(0)$  углов поворота  $\varphi_j$  его звеньев. Необходимые для выполнения задания исходные данные приведены в табл. 1 (все значения даны в системе СИ). Для параметров  $\delta$  и  $\tau$  (которые в таблицу не включены) принять:  $\delta = 0,022$ ;  $\tau = 1,20$  с.

### Основные этапы исследования манипулятора.

1. Выбрать закон управления движением схвата, обеспечивающий к моменту времени  $t = \tau$  малость рассогласования координат точек  $D$  и  $M$  (отношение его к начальному рассогласованию должно равняться  $\delta$ ).

2. Составить уравнения движения манипулятора и проинтегрировать их при помощи компьютера на промежутке времени  $[0, \tau]$ .

3. Построить траектории точек  $M$  и  $D$  на плоскости  $Oxy$  и графики зависимостей от времени угловых скоростей звеньев манипулятора, а также график зависимости от времени скорости точки  $C$ .

4. По результатам интегрирования для момента времени  $T'$  (этот момент в каждой группе указывает преподаватель) решить задачу методом мгновенных центров скоростей и сравнить полученный результат с результатом счёта на компьютере. При этом нужно также вычислить относительные погрешности для угловых скоростей звеньев и для скорости точки  $C$ .

**Выбор закона управления.** Предположим, что координаты точек  $M$  и  $D$  в процессе движения известны (например, путём измерения при помощи специальных датчиков). Тогда управляющее устройство может в любой момент времени вычислить рассогласования

$$\Delta x = x_M - x_D, \quad \Delta y = y_M - y_D. \quad (20)$$

Это устройство должно обеспечить сведение рассогласований (20) к нулю; кроме того, во избежание удара при захвате детали необходимо потребовать, чтобы и первые производные по времени от рассогласований были при  $t = \tau$  близки к нулю. Сформируем сигналы управления в виде линейных комбинаций рассогласований и их производных:

$$u_x = \Delta x + T^* \frac{d}{dt} \Delta x, \quad u_y = \Delta y + T^* \frac{d}{dt} \Delta y, \quad (21)$$

где  $T^*$  – постоянный коэффициент (*характерное время управления*).

Сигналы управления (21) после усиления подаются на приводы. В современных высокоточных манипуляторах коэффициенты усиления  $k$  очень велики (“жёсткое” управление), поэтому будем считать, что  $k \rightarrow \infty$ , а величины  $ku_x$ ,  $ku_y$  остаются конечными.

Тогда  $u_x, u_y \rightarrow 0$ , и приближённые предельные уравнения

$$u_x = 0, \quad u_y = 0 \quad (22)$$

описывают движение схвата (с погрешностью порядка  $1/k$ ).

Подставляя (21) в (22), получим следующие соотношения для рассогласований:

$$T^* \frac{d}{dt} \Delta x + \Delta x = 0, \quad T^* \frac{d}{dt} \Delta y + \Delta y = 0. \quad (23)$$

Таблица 1

Вар	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$x_D(0)$	$y_D(0)$	$x_D(\tau)$	$y_D(\tau)$	$\beta_x$	$\beta_y$
1	0.82	0.68	0.46	2.9	1.1	0.5	-0.55	2.3	1.6	0.2	0.8	6.4
2	0.81	0.47	0.91	1.3	2.2	3.6	-2.0	2.0	1.0	0.4	0.3	1.8
3	0.43	0.91	0.84	0.3	3.8	4.2	-0.22	1.4	-1.6	-0.5	0.3	2.4
4	0.42	0.97	0.99	3.0	0.2	0.1	-1.3	-0.5	0.56	0.25	2.0	16
5	0.78	0.45	0.91	1.7	0.1	5.8	1.35	1.88	-0.9	1.1	0.2	1.6
6	0.72	0.89	0.76	4.6	0.1	1.6	1.77	-1.66	-0.5	0.9	0.2	1.6
7	0.46	0.97	0.74	1.3	4.3	5.6	-0.8	1.3	1.2	-1.3	1.6	0.2
8	0.81	0.73	0.47	1.1	2.9	3.8	1.5	-0.55	-1.6	1.3	1.5	0.1
9	0.76	0.8	0.46	0.3	2.5	1.8	-1.8	0.3	0.6	2.2	1.6	0.2
10	0.72	0.49	0.78	0.5	4.2	3.6	1.88	1.33	-1.5	-0.1	1.9	0.2
11	0.83	0.57	0.49	0.5	1.6	3.0	-2.0	2.4	-0.8	0.5	0.5	2.0
12	0.68	0.46	0.83	3.9	4.9	0.3	1.8	-2.2	-1.6	-0.9	0.2	1.6
13	0.78	0.85	0.49	2.1	1.0	0.1	-0.91	0.11	1.1	1.6	1.6	0.2
14	0.48	0.97	0.73	0.3	1.8	3.7	-1.6	1.6	1.2	0.3	1.6	0.2
15	0.42	0.97	0.9	0.3	2.9	0.4	1.234	2.2	-1.5	-0.3	1.6	0.2
16	0.51	0.82	0.79	3.2	4.1	3.0	-0.78	-1.12	-1.65	1.2	0.2	1.6
17	0.41	0.83	0.98	2.0	4.3	1.4	-1.7	2.0	1.35	0.45	0.2	1.8
18	0.82	0.45	0.98	1.6	2.9	0.4	-1.85	-0.5	0.2	1.6	0.2	1.6
19	0.92	0.98	0.81	1.5	2.7	1.7	-2.0	2.3	-0.7	-0.1	0.2	1.6
20	0.79	0.68	0.48	4.1	5.8	1.1	2.0	0.3	-0.4	-2.1	1.6	0.2
21	0.76	0.42	1.4	5.2	0.4	2.3	-2.0	0.8	0.9	-1.0	1.6	0.2
22	0.75	0.78	0.47	1.1	2.8	2.0	-2.1	-0.4	0.16	2.25	0.2	1.6
23	0.71	0.49	0.82	4.9	0.1	1.9	-0.332	1.4	0.5	-1.35	0.2	1.6
24	0.75	0.65	0.78	0.3	1.9	0.1	1.5	2.2	-1.5	0.9	0.2	1.6
25	0.68	0.79	0.82	2.3	0.7	0.5	-1.4	2.121	2.0	-0.1	0.2	1.6
26	0.81	0.72	0.49	3.7	5.4	4.2	0.9	-1.8	-1.4	-0.3	1.0	0.1
27	0.78	0.65	0.48	1.6	0.1	1.5	2.6	2.426	1.2	0.5	0.2	1.6
28	0.45	0.97	0.78	0.9	0.5	3.9	2.0	-0.4	-1.2	1.3	0.2	1.6
29	0.49	0.98	0.77	2.1	0.4	3.7	-1.3	1.5	1.5	0.0	0.2	1.6
30	0.72	0.75	0.49	3.9	5.4	0.3	-0.4	-1.7	2.2	-0.6	0.4	4.8

Система (23) – это система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решением которой служит следующая пара функций:

$$\Delta x = \Delta x(0) e^{-t/T^*}, \quad \Delta y = \Delta y(0) e^{-t/T^*}, \quad (24)$$

где  $\Delta x(0)$ ,  $\Delta y(0)$  – значения рассогласований в начальный момент времени.

Из соотношений (24) следует, что с ростом времени  $t$  значения рассогласований и их производных монотонно стремятся к нулю, что и является целью управления.

Подставляя теперь в (24) выражения (20) для  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , получаем формулы (18) – (19). Эти формулы можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений движения точки  $M$ , а фигурирующие в них величины  $x_D$ ,  $y_D$ ,  $V_{Dx}$ ,  $V_{Dy}$  выступают в роли заданных функций времени.

Система этих дифференциальных уравнений при заданных начальных значениях  $x_M(0)$ ,  $y_M(0)$  однозначно описывает движение схвата.

Последнее утверждение может вызвать определённые сомнения. В самом деле, из динамики известно, что если дифференциальные уравнения движения механической системы записать в виде уравнений 1-го порядка, то их число должно вдвое превышать число степеней свободы, и для получения единственного решения нужно независимо задавать начальные условия как по координатам, так и по скоростям. Однако число уравнений в системе (18) – (19) равно числу степеней свободы, и они однозначно связывают координаты и скорости.

Выход из противоречия состоит в том, что предельные уравнения (22) (из которых мы и вывели уравнения движения точки  $M$ ) справедливы лишь за пределами малого начального промежутка времени – так называемого *пограничного слоя* [9]. За время прохождения пограничного слоя значения сигналов  $u_x$  и  $u_y$  (первоначально – конечные) сводятся системой управления до значений, близких нулю. Это и означает, что за пределами пограничного слоя движение схвата с погрешностью порядка  $1/k$  описывается уравнениями (18) – (19).

Нам осталось обсудить выбор характерного времени управления  $T^*$ .

По условию задачи в момент времени  $t = \tau$  должны выполняться соотношения

$$\Delta x(\tau) / \Delta x(0) = \Delta y(\tau) / \Delta y(0) = \delta; \quad (25)$$

подставляя в них значения функций (24) при  $t = \tau$  и логарифмируя полученные выражения, находим

$$T^* = -\tau / \ln \delta. \quad (26)$$

**Уравнения движения детали и схвата.** Как уже отмечалось, в задании данного типового расчёта зависимость координат детали  $D$  от времени задаётся дробно-линейными функциями специального вида (16) – (17). Рассмотрим более простую ситуацию, когда закон движения материальной точки  $D$  на отрезке времени  $[0, 1]$  имеет вид:

$$x_D = \frac{\beta_x t}{1 + \beta_x t - t}, \quad y_D = \frac{\beta_y t}{1 + \beta_y t - t}, \quad (27)$$

где  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  – некоторые положительные коэффициенты.

Формулы (16)–(17) отличаются от соотношений (27) наличием в правых частях масштабных множителей и постоянных слагаемых; кроме того, роль аргумента в этих формулах переходит от  $t$  к безразмерному времени  $s$ .

Дифференцируя соотношения (27) по времени, получаем выражения для компонент вектора скорости точки  $D$ :

$$V_{Dx} = \dot{x}_D = \frac{\beta_x}{(1 + \beta_x t - t)^2}, \quad V_{Dy} = \dot{y}_D = \frac{\beta_y}{(1 + \beta_y t - t)^2}. \quad (28)$$

Отсюда видно, что координаты  $x_D$  и  $y_D$  изменяются с ростом  $t$  монотонно (их производные по времени всюду положительны); при  $t = 0$  значения  $x_D$  и  $y_D$  – нулевые, а при  $t = 1$  они равны 1. Далее,  $V_{Dx}(0) = \beta_x$ ,  $V_{Dy}(0) = \beta_y$ ,  $V_{Dx}(1) = 1/\beta_x$ ,  $V_{Dy}(1) = 1/\beta_y$ .

Получим уравнения траектории точки  $D$ .

Как известно [3], для этого следует исключить время  $t$  из закона движения. Например, можно с помощью первого из соотношений (27) выразить  $t$  через  $x_D$  и подставить полученное выражение во второе соотношение. Но чуть быстрее нас приведёт к цели другой приём.

Выразим  $\beta_x$  и  $\beta_y$  через текущие значения координат и времени:

$$\beta_x = \frac{x(1-t)}{t(1-x)}, \quad \beta_y = \frac{y(1-t)}{t(1-y)} \quad (29)$$

(индексы при  $x$  и  $y$  мы для простоты записи опустили).

Поделим теперь почленно второе из равенств (29) на первое:

$$\beta \equiv \frac{\beta_y}{\beta_x} = \frac{y(1-x)}{x(1-y)}. \quad (30)$$

Сопоставляя равенство (30) с соотношениями (29) и (27), получаем уравнение траектории в виде:

$$y = \frac{\beta x}{1 + \beta x - x}. \quad (31)$$

Итак, зависимость  $y$  от  $x$  описывается дробно-линейной функцией. Заметим, что вид зависимости  $y$  от  $x$  вполне аналогичен виду зависимостей координат точки  $D$  от времени; это – специфическая особенность рассматриваемого закона движения точки  $D$ .

Графиком дробно-линейной функции в общем случае будет гипербола. Поскольку в нашем примере координаты  $x$  и  $y$  изменяются от 0 до 1, делаем окончательный вывод: траекторией точки  $D$  является дуга гиперболы (при  $\beta = 1$  она превращается в отрезок прямой  $y = x$ ). Эта дуга при  $\beta > 1$  обращена выпуклостью вверх, а при  $\beta < 1$  – выпуклостью вниз.

В общем же случае, когда закон движения детали  $D$  задан соотношениями (16)–(17), ситуация вполне аналогична. Однако при получении формул для компонент вектора скорости детали следует, дифференцируя соотношения (16)–(17) по  $t$ , воспользоваться теоремой о дифференцировании сложной функции: взять производные от правых частей этих соотношений по  $s$  и умножить результат на  $\dot{s} \equiv 1/\tau$ . Окончательно получаем:

$$V_{Dx} = \dot{x}_D = \frac{x_D(\tau) - x_D(0)}{\tau} \frac{\beta_x}{(1 + \beta_x s - s)^2}, \quad (32)$$

$$V_{Dy} = \dot{y}_D = \frac{y_D(\tau) - y_D(0)}{\tau} \frac{\beta_y}{(1 + \beta_y s - s)^2}. \quad (33)$$

Что касается движения схвата  $M$ , то получение дифференциальных уравнений его движения (18) – (19) было рассмотрено ранее. Теперь же мы нашли (в соответствии с формулами (16) – (17) и (32) – (33)) явный вид зависимости от времени входящих в (18) – (19) величин  $x_D$ ,  $y_D$ ,  $V_{Dx}$ ,  $V_{Dy}$ .

**Уравнения движения манипулятора.** Выше отмечалось, что рассматриваемый манипулятор является механической системой с двумя степенями свободы, так что движение схвата однозначно определяет движение всех его звеньев. Пользуясь аналитическим способом решения задач кинематики, составим (с помощью надлежащим образом выбранных графов) кинематические уравнения, откуда можно будет выразить скорость точки  $C$  и все угловые скорости  $\omega_{jz}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) через  $V_{Mx}$  и  $V_{My}$ . Полученные четыре формулы мы будем далее именовать *расчётными кинематическими формулами*.

В разделе 2 излагалась последовательность действий, которой можно придерживаться в ходе решения задач кинематики аналитическим способом. Соответствующие рекомендации сохраняют силу и здесь. Заметим, что во всех вариантах типового расчёта для получения расчётных кинематических формул достаточно рассмотреть два графа (если Вам потребовалось большее их число, то Ваше решение – заведомо неоптимальное).

Упомянутые кинематические формулы определяют, в частности, конкретный вид правых частей дифференциальных уравнений для углов  $\phi_j$ :

$$\dot{\phi}_j = \omega_{jz} (V_{Mx}, V_{My}, \phi_1, \phi_2, \phi_3). \quad (34)$$

Уравнения (34) вместе с уравнениями (18) – (19) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих движение манипулятора. Теперь данную систему можно при заданных начальных условиях численно проинтегрировать на компьютере, воспользовавшись услугами обучающей программы **robby2**; в результате движение манипулятора будет вполне определено.

Заметим, что движение манипулятора моделируется с использованием *избыточного набора переменных* [10]. Можно было бы ограничиться интегрированием лишь дифференциальных уравнений (18) – (19), но тогда для вычисления значений углов поворота звеньев в каждый момент времени требовалось бы решать систему нелинейных уравнений.

Следует также подчеркнуть, что манипулятор рассматриваемой здесь конструкции способен реализовать не всякое заранее заданное движение схвата. Геометрическим местом всевозможных положений схвата, допускаемых конструкцией манипулятора, является ограниченная область координатной плоскости  $Oxy$  – *рабочая область* манипулятора. Если управление требует, чтобы схват вышел за пределы рабочей области, то манипулятор не может это обеспечить.

Более подробное обсуждение особенностей кинематики трёхзвенного манипулятора, связанных с ограниченностью его рабочей области, можно найти в [11].

Здесь лишь отметим, что при тех значениях длин  $r_j$ , которые приведены в табл.1, манипулятор заведомо не может “дотянуться” до точки, удалённой на десять метров от начала координат  $O$ , так что она заведомо лежит вне его рабочей области.

Значения в табл.1 подобраны так, чтобы хват не выходил за пределы рабочей области манипулятора.

Рассмотрим на конкретном примере, как можно решить один из вариантов задания расчёта, используя возможности программы **robby2**.

### 3.2. Укращение строптивного... (о составлении расчётных формул в задании типового расчёта)

Рассмотрим манипулятор, кинематическая схема которого представлена на рис.16.

Дано:  $OA = r_1 = 0,442$  м;  $AB = r_2 = 0,846$  м;  $BC = r_3 = 0,620$  м;  $CM = 2r_3$ ;  $\varphi_1(0) = 1,550$  рад;  $\varphi_2(0) = 5,758$  рад;  $\varphi_3(0) = 0,308$  рад;  $x_D(0) = 2,940$  м;  $y_D(0) = -1,360$  м;  $x_D(\tau) = 1,640$  м;  $y_D(\tau) = 1,560$  м;  $\beta_x = 12,36$ ;  $\beta_y = 2,24$ ;  $\delta = 0,022$ ;  $\tau = 1,20$  с.

Из рисунка видно, что ползун  $C$  движется по вертикали. Поэтому задача составления расчётных кинематических формул конкретизируется следующим образом.

Требуется выразить угловые скорости  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$  и линейную скорость  $V_{Cy}$  через  $V_{Mx}$  и  $V_{My}$ .

Предположим, что поставленная задача досталась студенту Пушкиву Леониду Остаповичу, и проследим за ходом его действий.

Лёня знает (от преподавателя или из настоящего пособия), что задачу можно решить, используя два кинематических графа. В качестве первого графа – в соответствии с рекомендациями из раздела 2 – следует выбрать такой, с которым связано не более двух неизвестных величин.

На рис.16 – не так уж много точек, и в принципе при выборе графа можно было бы действовать способом перебора: перебирать по очереди все приходящие на ум графы и проверять (учитывая связи в конечных точках), сколько же неизвестных связано с каждым из них. Но это, конечно, не самый рациональный путь.

Леонид немного задумался и пришёл к таким выводам. Во-первых, поскольку скорости нужно выразить через проекции линейной скорости точки  $M$ , то точка  $M$  обязательно должна быть одной из конечных точек первого графа (иначе проекции её линейной скорости не попадут в кинематические соотношения). Во-вторых, всего в задаче – четыре неизвестные величины, а два графа способны дать четыре кинематических соотношения; значит, ни точка  $A$ , ни точка  $B$  не могут быть конечными точками (в противном случае в кинематические соотношения войдут проекции их линейных скоростей, и неизвестных величин станет больше).

Таким образом, второй из конечных точек первого графа может быть либо точка  $O$ , либо точка  $C$  (скорость неподвижной точки  $O$  равна нулю, а для точки  $C$ , движущейся по вертикали,  $V_{Cx} = 0$ , а  $V_{Cy}$  – одна из искомым величин).

После этих рассуждений Лёне осталось рассмотреть всего две возможности:

$$O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{3} M \quad \text{и} \quad C \xrightarrow{3} M.$$

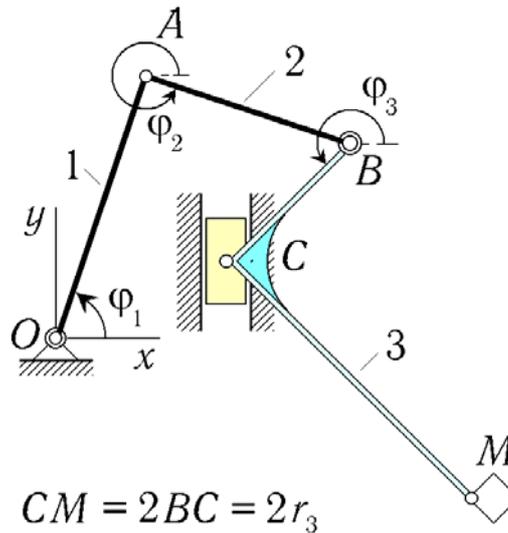


Рис. 16. Трёхзвенный робот-манипулятор

Правильный выбор теперь сделать нетрудно: с первым из этих графов связаны три неизвестные величины ( $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$  и  $\omega_{3z}$ ), а со вторым – две:  $\omega_{3z}$  и  $V_{Cy}$ .

С чувством удовлетворения Леонид записал:

Выберем граф

$$C \xrightarrow[\varphi_3 + \pi/2]{3} M.$$

Кинематический угол для направленного отрезка  $\overline{CM}$  Леонид нашёл правильно: этот отрезок (если перенести его, не меняя направления, в точку  $B$ ) можно получить из отрезка  $\overline{BC}$  (для которого кинематический угол равен  $\varphi_3$ ) поворотом на  $90^\circ$  в положительном направлении (а также растяжением в два раза, что сейчас, впрочем, совсем не важно).

Составим кинематические соотношения для выбранного графа:

$$V_{Mx} = V_{Cx} - \omega_{3z} 2r_3 \sin(\varphi_3 + \pi/2), \quad (35)$$

$$V_{My} = V_{Cy} + \omega_{3z} 2r_3 \cos(\varphi_3 + \pi/2). \quad (36)$$

Выражения, включающие синус и косинус, нетрудно упростить по формулам приведения. Теперь следует учесть связи в концевых точках графа (Леонид фактически уже делал это при выборе графа, но пришла пора перенести всё это на бумагу). Поскольку на движение точки  $M$  никаких ограничений не накладываемся, а ползун может двигаться лишь по вертикали (что приводит к условию  $V_{Cx} = 0$ ), Леонид записал:

Учитывая связи, имеем:

$$V_{Mx} = -\omega_{3z} 2r_3 \cos \varphi_3, \quad (37)$$

$$V_{My} = V_{Cy} - \omega_{3z} 2r_3 \sin \varphi_3. \quad (38)$$

Отсюда было уже совсем нетрудно выразить через компоненты скорости схвата кинематические величины  $\omega_{3z}$  и  $V_{Cy}$ .

Решая кинематические уравнения (37) и (38), находим:

$$\omega_{3z} = -\frac{V_{Mx}}{2r_3 \cos \varphi_3}, \quad V_{Cy} = V_{My} + 2\omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3. \quad (39)$$

Заметим, что вовсе не требуется подставлять во вторую из полученных сейчас расчётных кинематических формул выражение для  $\omega_{3z}$ , которое даёт первая формула. Расчётные формулы нужны для того, чтобы программа **robby2** многократно вычисляла по ним правые части дифференциальных уравнений (34) в процессе их численного интегрирования. Вычисления программа выполняет в том порядке, в котором расчётные формулы записаны; поэтому на этапе вычисления текущего значения  $V_{Cy}$  текущее значение  $\omega_{3z}$  будет уже найдено.

Полученные расчётные формулы Лёня записал в виде, пригодном для ввода в программу **robby2**:

$$(1) \quad \omega_{3z} = -v_{Mx} / 2r_3 \cos \varphi_3$$

$$(2) \quad v_{Cy} = v_{My} + 2\omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3$$

Теперь осталось выбрать второй граф и найти с его помощью кинематические величины  $\omega_{1z}$  и  $\omega_{2z}$ .

Выбирая граф, Леонид исходил из простого рассуждения: для того чтобы в составленные для графа кинематические соотношения вошли угловые скорости звеньев 1 и 2, необходимо, чтобы граф “проходил” по этим звеньям. С учётом этого при выборе второго графа остаются лишь две возможности:

$$O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} C \quad \text{и} \quad O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{3} M.$$

С каждым из этих графов связаны две неизвестные величины:  $\omega_{1z}$  и  $\omega_{2z}$ , так что для получения расчётных формул можно использовать любой из графов. Очевидно, однако, что уравнения, полученные с помощью последнего графа, будут более громоздкими: с ним связано больше известных величин, не равных нулю. Поэтому Леонид записал:

Выберем также граф

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{1} A \xrightarrow[\varphi_2]{2} B \xrightarrow[\varphi_3]{3} C.$$

Составим с его помощью кинематические соотношения, учитывая связи в конечных точках:

$$V_{Cx}^0 = V_{Ox}^0 - \omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3, \quad (40)$$

$$V_{Cy}^0 = V_{Oy}^0 + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3. \quad (41)$$

Вновь в нашем распоряжении – система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными; однако теперь уже каждая из неизвестных встречается в обоих уравнениях. Наиболее удобный способ решения такой системы состоит в поочередном исключении из неё одной из неизвестных.

Леонид решил сначала исключить неизвестную  $\omega_{2z}$ . Сравнивая слагаемые с  $\omega_{2z}$  в обоих уравнениях, он заметил, что для этого достаточно домножить первое из уравнений на  $\cos \varphi_2$ , второе – на  $\sin \varphi_2$ , а затем их сложить.

Получаем:

$$V_{Cy} \sin \varphi_2 = -\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \\ + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3 \sin \varphi_2.$$

Это выражение – ещё не окончательный ответ, поскольку оно достаточно громоздко. Однако, сгруппировав слагаемые с  $\omega_{1z}$  и  $\omega_{3z}$ , нетрудно заметить, что в роли коэффициентов выступают синусы разностей углов (с подобной ситуацией Вы встретитесь и в остальных вариантах задания):

$$V_{Cy} \sin \varphi_2 = \omega_{1z} r_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \omega_{3z} r_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) .$$

Отсюда:

$$\omega_{1z} = \frac{V_{Cy} \sin \varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{r_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (42)$$

(знак плюс при  $\omega_{3z}$  поставлен потому, что Лёня изменил порядок следования углов в круглых скобках).

Теперь осталось получить расчётную формулу для  $\omega_{2z}$  (что можно сделать, исключив аналогичным способом из уравнений (40) – (41) неизвестную  $\omega_{1z}$ ). Лёня сначала так и собирался поступить, но затем сообразил: в эти уравнения переменные с индексами 1 и 2 входят симметрично, так что нужная формула получится, если в формуле (42) индексы 1 и 2 поменять местами (учтите, что этот приём проходит не во всех вариантах задания типового расчёта!).

Таким образом,

$$\omega_{2z} = \frac{V_{Cy} \sin \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} . \quad (43)$$

У читателя может возникнуть вопрос: а почему нельзя было просто выразить  $\omega_{2z}$  из уравнения (40), поскольку угловая скорость  $\omega_{1z}$  теперь известна? Но Лёня (обративший в своё время внимание на пояснения преподавателя) действовал совершенно правильно.

Дело в том, что расчётная формула, полученная непосредственно из уравнения (40), содержала бы в знаменателе  $\sin \varphi_2$ . Если в ходе моделирования текущее значение  $\sin \varphi_2$  обратится в нуль, то правая часть формулы превратится в неопределённость типа “0/0”, а выполнение программы натолкнётся на ошибку “деление на нуль”. Обращение в нуль значения  $\sin \varphi_2$  отнюдь не исключается постановкой задачи (более того, после получения результатов моделирования мы увидим, что в один из моментов времени это действительно произойдёт).

Расчётная формула (43) также содержит в знаменателе множитель, который может обратиться в нуль:  $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Нетрудно, однако, убедиться, что обращение в нуль этого множителя соответствует нарушению линейной независимости уравнений (40) – (41) (определитель системы этих линейных уравнений пропорционален данному множителю). Такая ситуация соответствует [11] *кинематическому вырождению* и может произойти лишь при выходе схвата на границу рабочей области (как уже отмечалось выше, исходные данные подобраны так, чтобы этого не случилось). Значит, формулой (43) можно пользоваться спокойно.

Формулы (42) и (43) Леонид также записал в виде, пригодном для ввода в обучающую программу:

$$(3) \quad \omega_{1z} = (v_{Cy} \sin \varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)) / r_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$(4) \quad \omega_{2z} = (v_{Cy} \sin \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)) / r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Обратите внимание: в числителе последней формулы Леонид допустил ошибку, поменяв  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$  местами (читатель, возможно, уже давно дожидается, что что рано или поздно г-н Л.О.Пушков оправдает своё имя; это и случилось). Позже мы посмотрим, к чему это приведёт.

Моделирование движения манипулятора требует ещё задания начальных значений  $x_M(0)$  и  $y_M(0)$ . Для их нахождения рассмотрим граф, соответствующий маршруту движения из начала координат  $O$  в точку  $M$ :

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{1} A \xrightarrow[\varphi_2]{2} B \xrightarrow[\varphi_3]{3} C \xrightarrow[\varphi_3 + \pi/2]{3} M.$$

Составляя с помощью этого графа уравнения (уже не для скоростей, а для координат), получаем:

$$x_M = r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + r_3 (\cos \varphi_3 - 2 \sin \varphi_3), \quad (44)$$

$$y_M = r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 + r_3 (\sin \varphi_3 + 2 \cos \varphi_3). \quad (45)$$

Учитывая приведённые в условии значения  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\varphi_3(0)$ , находим:  $x_M(0) = 0,95609$  м,  $y_M(0) = 1,38735$  м.

Теперь осталось решить задачу Коши для дифференциальных уравнений (18), (19), (34). Сделать это можно численно, применив один из *методов численного интегрирования* [12–14].

Вот здесь обучающая программа **robby2** и предоставляет свои услуги. Если Вы прибегаете к её помощи, то Вам больше не нужно заботиться о численном интегрировании уравнений движения манипулятора: достаточно лишь ввести в программу исходные численные данные и расчётные кинематические формулы.

Лёня Пушкив собрал свои черновики и направился в дисплейный класс; последуем за ним и мы (а Вам настоятельно рекомендуем: перед тем, как идти в класс персональных компьютеров, покажите свои выкладки преподавателю – сэкономите и своё, и компьютерное время!).

### 3.3. Набирай, но проверяй... (о работе с обучающей программой при моделировании движения робота)

Предположим теперь, что Вы пришли в класс персональных компьютеров, вызвали программу **robby2** и выбрали в её основном меню пункт **“Типовой расчёт”**. Тогда на экране видеомонитора появится меню подсистемы моделирования движения робота-манипулятора. В этом меню – три пункта: **“Знакомство с заданием”**, **“Выполнение задания”** и **“Завершение работы”**.

Выбирая пункт **“Знакомство с заданием”**, Вы можете познакомиться с демонстрационным вариантом задачи о моделировании движения робота. В этом варианте кинематическая схема робота-манипулятора заимствована из разобранный в [4] примера выполнения задания, а в качестве траектории движения детали  $D$  выбрана окружность. Программа продемонстрирует Вам весь процесс движения робота-манипулятора, включая захват им детали, а затем покажет графики функций  $\omega_{1z}(t)$ ,  $\omega_{2z}(t)$ ,  $\omega_{3z}(t)$ ,  $V_{Cx}(t)$  и таблицу численных значений величин  $x_M$ ,  $y_M$ ,  $V_{Mx}$ ,  $V_{My}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$  и  $V_{Cx}$  (в этом варианте точка  $C$  перемещается по горизонтали). Аналогичные результаты нужно будет получить и Вам!

После выбора пункта **“Выполнение задания”** обучающая программа спросит у Вас номер варианта выполняемого задания, а затем задаст вопрос:

### Вы впервые решаете эту задачу?

Если Вы впервые выполняете данный ТР, то просто нажмите клавишу **Enter** (если же Вы ранее пытались выполнять задание своего варианта, но допустили ошибки и, не сумев их сразу исправить, сохранили результаты работы на диске в рабочем файле, то ответьте “**N**”; тогда программа вступит с Вами в диалог, в ходе которого Вы сообщите ей имя своего файла и сэкономите себе работу по повторному набору исходных данных и формул).

После этого программа попросит Вас ввести Вашу фамилию, инициалы и название Вашей группы. Сделайте это аккуратно, так как эта информация будет выведена на экран вместе с Вашими результатами (содержимое экрана Вы можете сохранять в виде графических файлов, которые затем можно будет вставить в текст отчёта с решением задачи).

Далее следует этап входного контроля (надеемся, что Вы его благополучно преодолёте).

Теперь на экране появилось *меню для ввода параметров задания ТР*. С его помощью Вам предстоит набрать численные значения параметров  $r_1, r_2, r_3, \varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), x_M(0), y_M(0), x_D(0), y_D(0), x_D(\tau), y_D(\tau), \delta$  и  $\tau$  для Вашего варианта. Имейте в виду, что при необходимости оперативно выполнить какие-либо вычисления Вы можете, нажав клавишу **F2**, вызвать КАЛЬКУЛЯТОР.

Выбирая соответствующие поля меню, введите параметры вашего манипулятора. Если заданное по умолчанию значение Вас устраивает, то заменять его не нужно.

<p>Размеры звеньев :</p> <p><math>r_1 =</math> <input type="text" value="0.442"/></p> <p><math>r_2 =</math> <input type="text" value="0.846"/></p> <p><math>r_3 =</math> <input type="text" value="0.620"/></p> <p>Относительная точность совмещения схвата М и детали D :</p> <p><math>\delta =</math> <input type="text" value="0.022"/></p> <p>Время моделирования :</p> <p><math>\tau =</math> <input type="text" value="1.200"/></p>	<p>Начальные значения углов поворота звеньев :</p> <p><math>\varphi_1(0) =</math> <input type="text" value="1.550"/>    <math>\varphi_2(0) =</math> <input type="text" value="5.758"/>    <math>\varphi_3(0) =</math> <input type="text" value="0.308"/></p> <p>Начальные значения координат схвата М :</p> <p><math>x_M(0) =</math> <input type="text" value="0.956"/>    <math>y_M(0) =</math> <input type="text" value="1.387"/></p> <p>Начальные значения координат детали D :</p> <p><math>x_D(0) =</math> <input type="text" value="2.940"/>    <math>y_D(0) =</math> <input type="text" value="-1.360"/></p> <p>Конечные значения координат детали D :</p> <p><math>x_D(\tau) =</math> <input type="text" value="1.640"/>    <math>y_D(\tau) =</math> <input type="text" value="1.560"/></p> <p>Параметры :</p> <p><math>\beta_x =</math> <input type="text" value="12.360"/></p> <p><math>\beta_y =</math> <input type="text" value="2.240"/></p>
---	---

Если Вы закончили ввод параметров, нажмите клавишу **F10**

Рис. 17. Меню для ввода параметров задания

Если Вы предварительно обеспечили считывание относящихся к Вашему варианту данных из рабочего файла, то Вам достаточно работать только с параметрами, значения которых хотите изменить.

У Лёни Пушкива таких данных, разумеется, не было. Поэтому он честно набрал значения всех параметров (рис.17).

Завершив ввод параметров, проверьте то, что Вы набрали, и нажмите функциональную клавишу **F10**. После этого Вы увидите очередное меню – меню для ввода расчётных формул; с его помощью Вам предстоит набрать четыре расчётные кинематические формулы. Тщательно проверьте то, что Вы набрали, прежде чем выбрать пункт “**Завершение ввода формул**”!

Результат действий Леонида приведён на рис.18.

Вслед за выбором указанного пункта на экране через одну-две секунды (необходимые для численного интегрирования уравнений движения манипулятора) появляются изображения детали и манипулятора, соответствующие нулевому моменту времени, а в нижней части экрана возникает надпись:

**Нажмите какую-либо клавишу**

После нажатия клавиши программа **robby2** демонстрирует процесс сближения детали и манипулятора; при этом на каждом очередном кадре изображаются маленькими (размером в один пиксел) точками все предыдущие положения детали  $D$  и схвата  $M$ , так что к концу процесса на экране изображены пунктиром траектории точек  $D$  и  $M$  (рис.19 – 20).

Лёня был, конечно, обескуражен, увидев, как его манипулятор сломался и задёргался, едва начав движение. Схват и ползун отделились от остальных частей манипулятора и двигались далее независимо (рис.19).

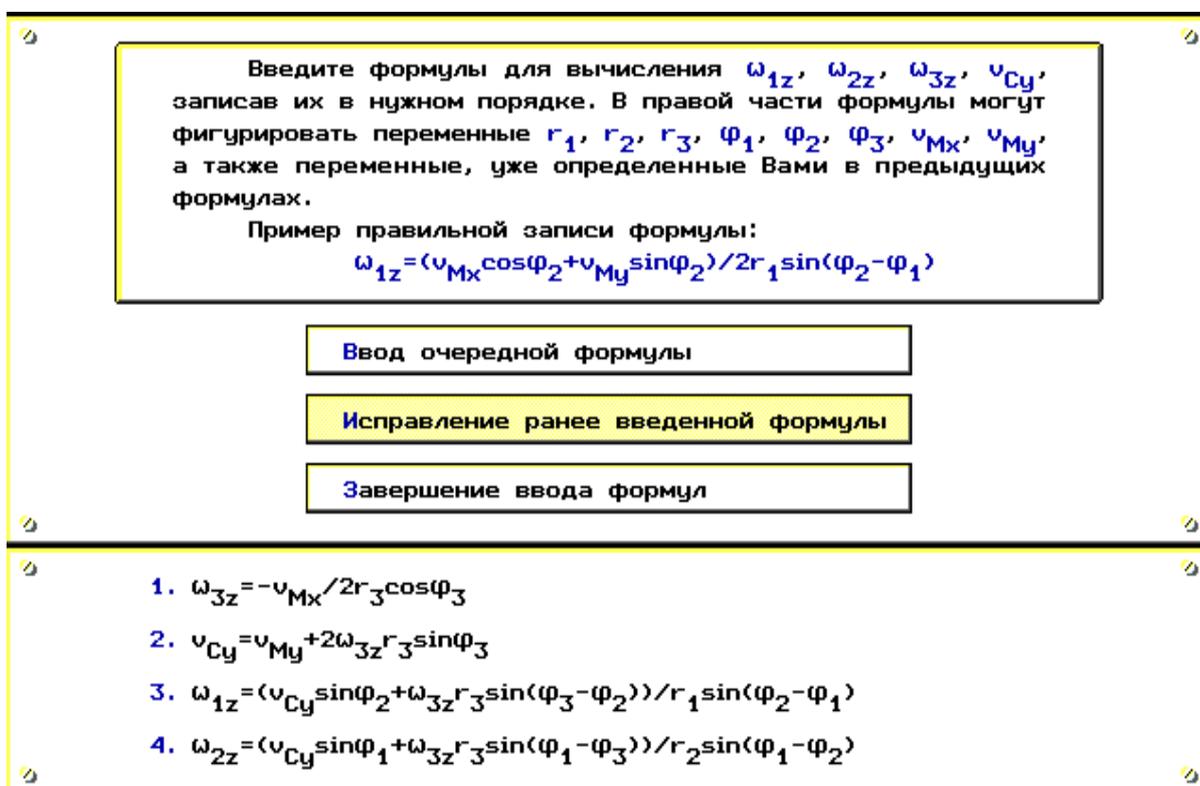


Рис. 18. Меню для ввода расчётных формул

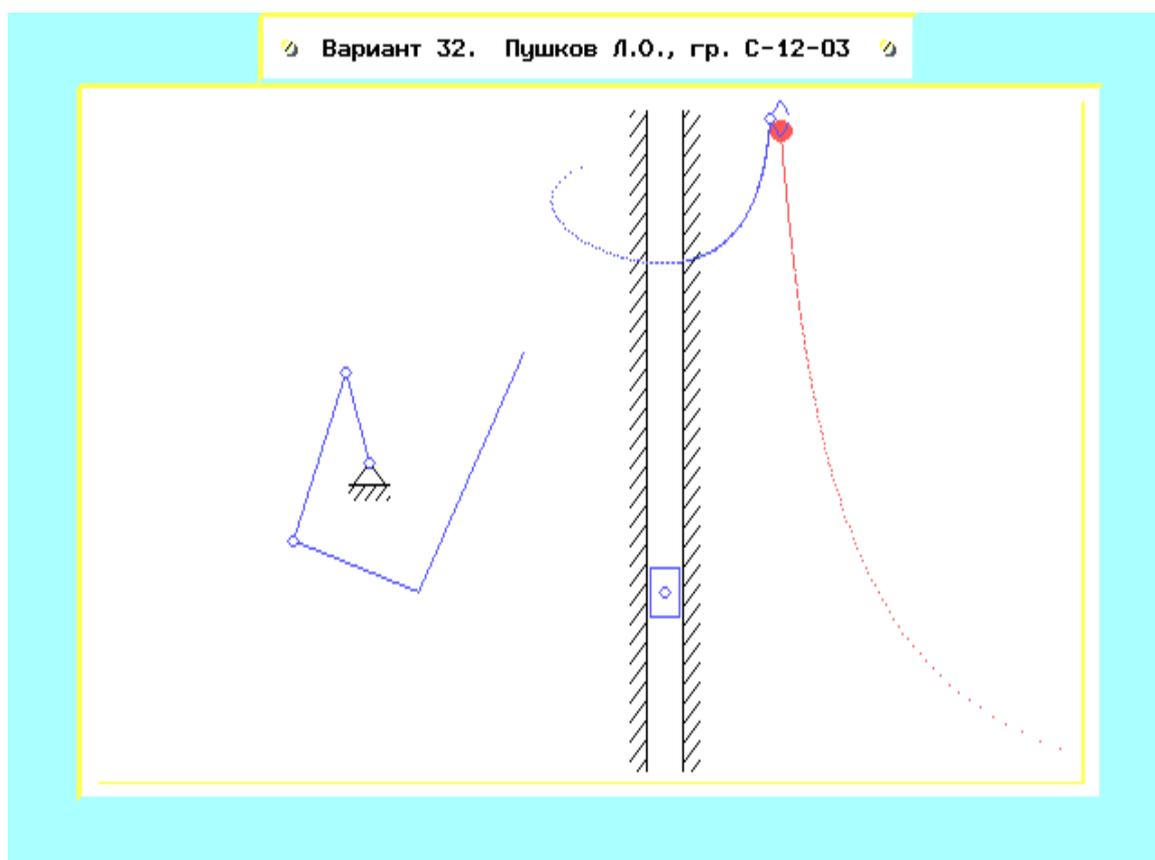


Рис. 19. Движение манипулятора (расчётные формулы содержат ошибку)

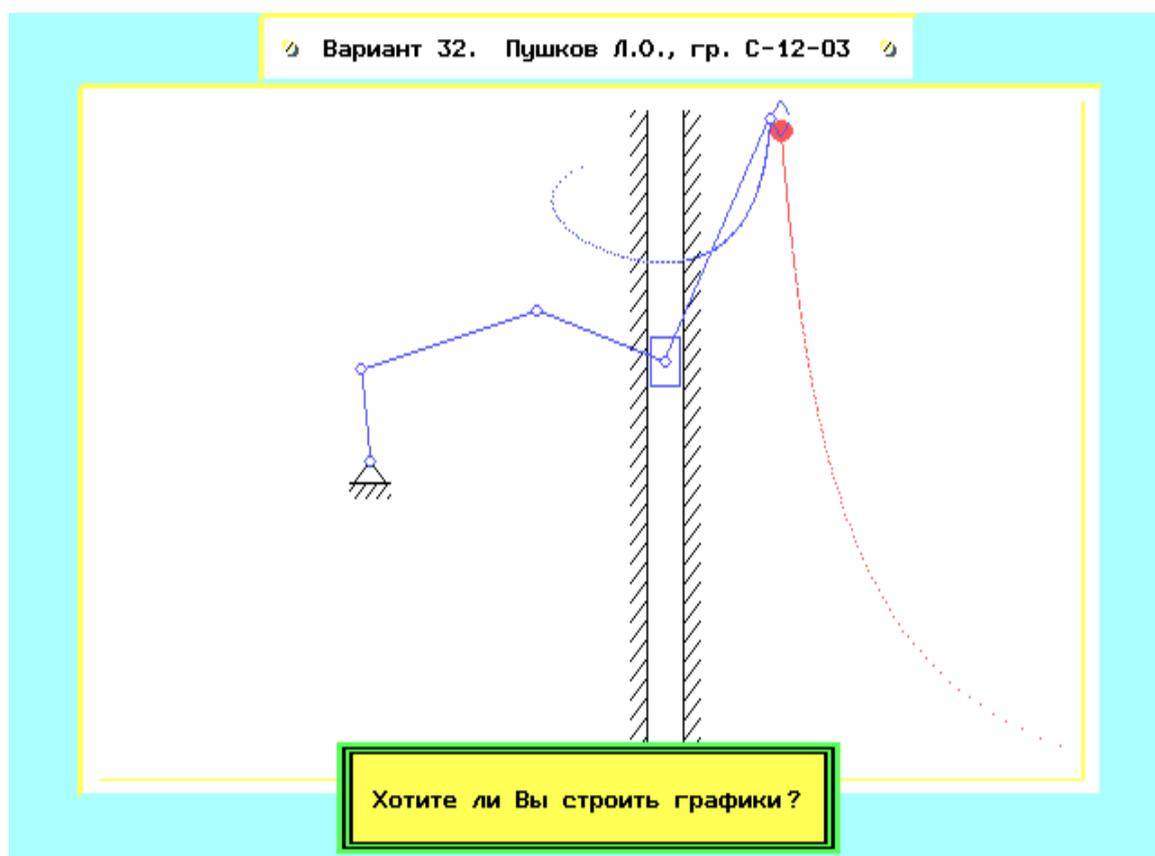


Рис. 20. Движение манипулятора (правильные расчётные формулы)

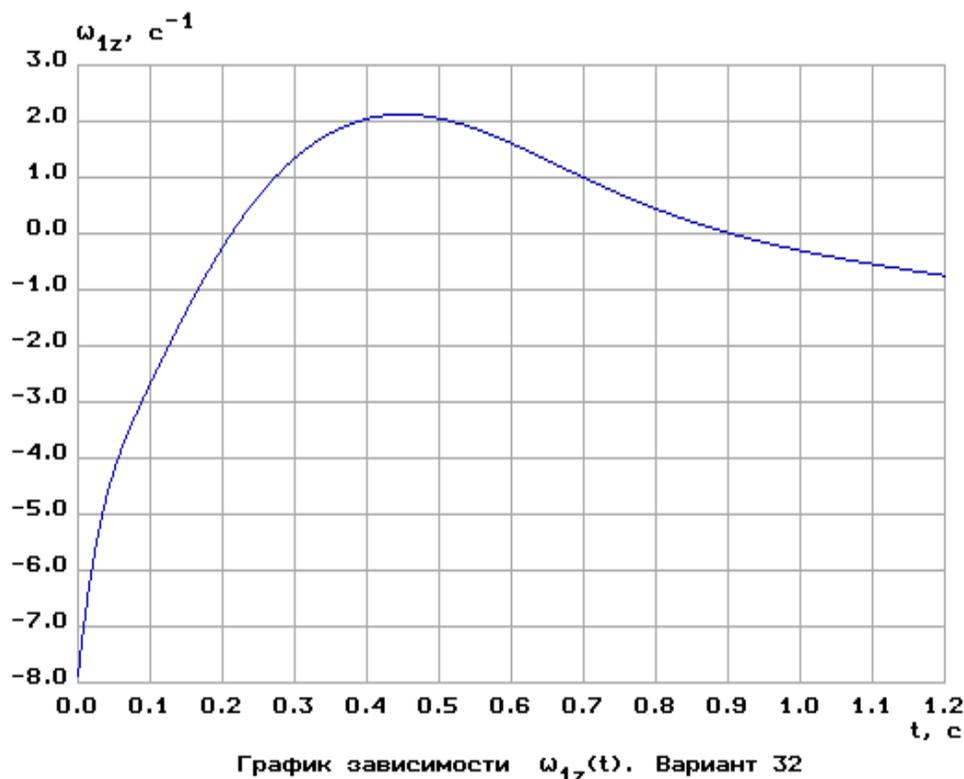


Рис. 21. График угловой скорости звена I

Поразмыслив над полученными результатами, Леонид нашёл допущенную им ошибку. Выйдя из режима просмотра результатов моделирования, он вновь выбрал пункт **“Выполнение задания”** и повторно ввёл номер варианта: **32**<sup>1</sup> (теперь уже программа **robby2** не предлагала ему решить задачу входного контроля; так она поступает всегда, если на запрос о номере варианта задания введено *то же самое* число, что и ранее). Дойдя до меню для ввода расчётных формул, Лёня, используя пункт **“Исправление ранее введенной формулы”**, набрал четвертую формулу правильно:

$$(4) \quad \omega_{2z} = (v_{Cy} \sin \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)) / r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

На этот раз моделирование прошло успешно (рис.20).

(Если бы время работы в дисплейном классе подходило к концу, и Лёня уже не имел возможности заниматься поиском и исправлением ошибки, то ему следовало бы выйти из подсистемы моделирования движения манипулятора. При этом на вопрос обучающей программы о том, нужно ли сохранять результаты работы в рабочем файле, он ответил бы утвердительно, а затем ввёл бы имя этого файла.)

Ответив **“У”** на вопрос **“Хотите ли Вы строить графики?”**, Леонид получил (и сохранил в виде графических файлов) графики зависимостей величин  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$  и  $V_{Cy}$  от времени (один из них приведён на [рис.21](#)). То же самое Лёня сделал и с таблицей результатов моделирования ([рис.22](#)).

На этом работа Леонида в дисплейном классе завершилась. Возвратившись домой, он приступил к выполнению последнего этапа исследования – к выполнению геометрической проверки, основанной на решении задачи методом мгновенных центров скоростей.

<sup>1</sup> Л.О.Пушков – персонаж вымышленный, поэтому он и решает задачу несуществующего 32-го варианта (заметим, что “лопушок” – излюбленное выражение заведующего кафедрой теоретической механики и мехатроники МЭИ профессора А.И.Кобриня).

Численные результаты моделирования  
Вариант 32. Пушков Л.О., гр. С-12-03

t	$x_M$	$y_M$	$v_{Mx}$	$v_{My}$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\omega_{1z}$	$\omega_{2z}$	$\omega_{3z}$	$v_{Cy}$
0.0	0.956	1.387	-6.095	-3.288	1.550	5.758	0.308	-7.864	-5.907	5.158	-1.348
0.120	0.902	1.095	1.891	-1.643	1.036	5.378	0.354	-2.141	-1.749	-1.626	-2.342
0.240	1.151	0.965	2.021	-0.563	0.945	5.282	0.146	0.505	0.046	-1.648	-0.859
0.360	1.367	0.941	1.537	0.126	1.097	5.355	-0.029	1.858	1.111	-1.240	0.170
0.480	1.524	0.983	1.081	0.546	1.343	5.527	-0.156	2.097	1.702	-0.883	0.716
0.600	1.632	1.064	0.734	0.788	1.571	5.744	-0.245	1.607	1.845	-0.610	0.972
0.720	1.705	1.167	0.486	0.913	1.721	5.958	-0.306	0.878	1.706	-0.411	1.066
0.840	1.753	1.280	0.314	0.962	1.789	6.151	-0.347	0.256	1.499	-0.269	1.075
0.960	1.783	1.396	0.197	0.964	1.792	6.320	-0.373	-0.186	1.326	-0.170	1.041
1.080	1.802	1.510	0.118	0.938	1.751	6.472	-0.389	-0.498	1.210	-0.103	0.986
1.200	1.813	1.620	0.066	0.895	1.676	6.613	-0.398	-0.749	1.151	-0.057	0.923

Рис. 22. Таблица результатов моделирования

Значения для такой проверки Леонид (в соответствии с указаниями преподавателя) взял из 7-й строки таблицы результатов. Значения углов он перевёл из радианной в градусную меру, а затем, используя транспортир и линейку, вычертил на чистом листе в масштабе 1:10 текущую конфигурацию манипулятора. По текущим значениям  $v_{Mx}$  и  $v_{My}$  в произвольном масштабе он изобразил вектор  $\vec{v}_M$ , а затем вычислил его модуль:

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \sqrt{0,486^2 + 0,913^2} = 1,034 \text{ м/с.} \quad (46)$$

После этого Лёня нашёл МЦС звеньев манипулятора и изобразил линейные и угловые скорости (рис.23).

Теперь осталось выполнить числовые выкладки и найти модули линейных и угловых скоростей.

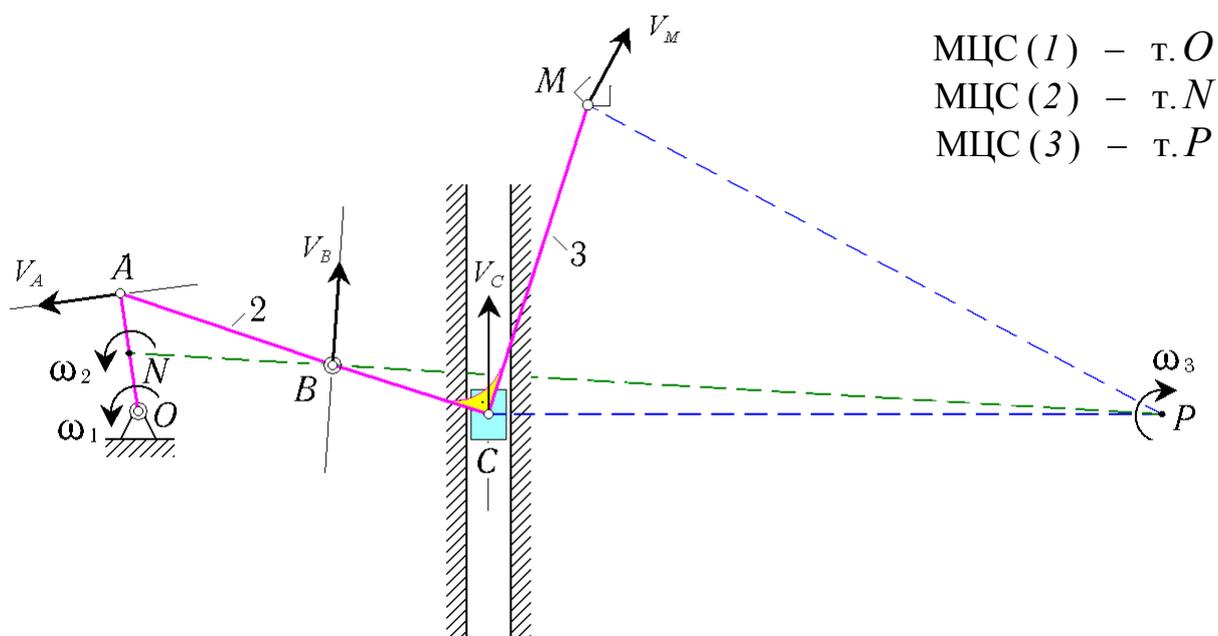


Рис. 23. Геометрическое решение задачи о манипуляторе

Имеем:

$$\omega_3 = v_M / |MP| = 1,034 / 2,45 = 0,422 \text{ с}^{-1},$$

$$v_C = \omega_3 \cdot |CP| = 0,422 \cdot 2,54 = 1,072 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega_3 \cdot |BP| = 0,422 \cdot 3,15 = 1,329 \text{ м/с},$$

$$\omega_2 = v_B / |BN| = 1,329 / 0,775 = 1,716 \text{ с}^{-1},$$

$$v_A = \omega_2 \cdot |AN| = 1,716 \cdot 0,23 = 0,395 \text{ м/с},$$

$$\omega_1 = v_A / |AO| = 0,395 / 0,442 = 0,894 \text{ с}^{-1}.$$

Необходимые расстояния Леонид находил так: измерял линейкой расстояния между точками, умножал результат на 10 и переводил в метры.

Учитывая ориентацию линейных и угловых скоростей, получаем:

$$\omega_{1z}^* = \omega_1 = 0,894 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_{2z}^* = \omega_2 = 1,716 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_{3z}^* = -\omega_3 = -0,422 \text{ с}^{-1}, \quad v_{Cy}^* = v_C = 1,072 \text{ м/с}$$

(вновь найденные в ходе проверки значения скоростей мы обозначили при помощи звёздочки, чтобы отличить их от значений из таблицы результатов). Теперь вычисляем относительные погрешности для скоростей  $\omega_{1z}$ ,  $\omega_{2z}$ ,  $\omega_{3z}$  и  $v_{Cy}$ :

$$\delta_1 \equiv \left| \frac{\omega_{1z}^* - \omega_{1z}}{\omega_{1z}} \right| \cdot 100\% = 1,78\%, \quad \delta_2 = 0,53\%,$$

$$\delta_3 = 2,72\%, \quad \delta_4 = 0,59\%.$$

Все эти погрешности меньше 5%, так что делаем вывод: расчёт выполнен правильно.

## Библиографический список

1. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В.** Методические указания по работе студентов с обучающей программой по кинематике. М.: Издательство МЭИ, 1995. 32 с.
2. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В.** Решение задач статики на персональном компьютере: Методическое пособие. М.: Издательство МЭИ, 2003. 64 с.
3. **Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.** Курс теоретической механики: Учебник. СПб.: Лань, 2002. 736 с.
4. **Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.** Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986. 136 с.
5. **Кирсанов М.Н.** Решебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2002. 384 с.
6. **Фигурнов В.Э.** IBM PC для пользователя. М.: Финансы и статистика, 1990. 240 с.
7. **Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л.** Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.
8. **Бурдаков С.Ф., Дьяченко В.А., Тимофеев А.Н.** Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов. М.: Высш. шк., 1986. 264 с.
9. **Новожилов И.В.** Фракционный анализ. М.: Издательство Моск. ун-та, 1991. 190 с.

10. **Зацепин М.Ф., Новожилов И.В.** Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных / Сб. научно-метод. статей по теоретической механике. Вып. 18. М.: Высш. шк., 1987. С. 62 – 66.
11. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В., Устинов В.Ф.** Методические указания по работе студентов с обучающими программами по динамике. М.: Издательство МЭИ, 1996. 58 с.
12. **Вержбицкий В.М.** Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.
13. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
14. **Каханер Д., Моулер К., Нэш С.** Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. 575 с.

## Содержание

Введение .....	3
1. Общие сведения об обучающей программе <b>robby2</b> .....	4
1.1. Кинематика? – нет проблем (о назначении программы) .....	4
1.2. Входим и выходим... (о том, как начать и завершить работу с обучающей программой) .....	5
1.3. Сквозь тернии – к звёздам! (о решении тестовой задачи) .....	7
2. Пример использования программы <b>robby2</b> при выполнении индивидуального домашнего задания по кинематике .....	8
2.1. Так рождается задача... (о программе синтеза индивидуальных домашних заданий <b>synkin</b> ) .....	8
2.2. Два этюда на одну и ту же тему (пример выполнения индивидуального домашнего задания) .....	18
2.3. И увидел он, что всё хорошо, и возрадовался... (о проверке правильности решения ИДЗ) .....	23
3. Пример выполнения типового расчёта при помощи программы <b>robby2</b> .....	24
3.1. Схватить деталь? – Всегда готов! (о постановке задачи моделирования движения робота-манипулятора) .....	24
3.2. Укрощение строптивого... (о составлении расчётных формул в задании типового расчёта) .....	36
3.3. Набирай, но проверяй... (о работе с обучающей программой при моделировании движения робота) .....	40
Библиографический список .....	46