КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по разделу
«ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА, РЯДЫ И ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ-ЭЙЛЕРА»
курса СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.
(IV семестр, II курс, поток АЭ 8-13,2006г)

Лекция 1. Основные понятия и определения.

1.1. Последовательности (П) числовые (ЧП) и функциональные (ФП): ограниченные П и их предел (ППр), сходящиеся (ПСх).

Последовательность это **упорядоченное (пронумерованное) множество элементов** (чисел или непрерывных на заданном интервале функций), когда каждому элементу поставлено в соответствие натуральное число по определенному правилу (закону)

$$\{a\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}; a_n = a(n), n = 1,2,3,\ldots\infty \qquad (1)$$

$$\{f(x)\} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots\} = \{f_n(x)\}; f_n(x) = f(x,n), n = 1,2,3,\ldots\infty \qquad (2)$$

Последовательность ограничена сверху (или снизу) если для всех элементов последовательности выполняются неравенства

$$a_n \le (\ge) M(m); n = 1,2,3,\ldots\infty \qquad (3)$$

$$f_n(x) \le (\ge) M(x)(m(x)); x \in (c,d), n = 1,2,3,\ldots\infty \qquad (4)$$

Последовательность ограничена если она ограничена с обеих сторон

$$m \le a_n \le M; \qquad (5)$$

$$m(x) \le f_n(x) \le M(x); x \in (c,d), n = 1,2,3,..,\infty \qquad (6)$$

Бесконечно малая (большая) П если, начиная с некоторого номера элемента, для всякого последующего элемента справедливо соотношение

$$a_{n+m} \to 0; m \to \infty; (a_{n+m} \to \infty, m \to \infty) \qquad (7)$$

$$f_{n+m}(x) \to 0; m \to \infty; (f_{n+m}(x) \to \infty, m \to \infty) \qquad (8)$$

Монотонные П (неубывающие или невозрастающие), если каждый последующий элемент П не меньше (не больше) предыдущего

$$a_n \le a_{n+1}; (a_n \ge a_{n+1}), n = 1,2,3,....\infty \tag{9}$$

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x); (f_n(x) \ge f_{n+1}(x)), x \in (a,b), n = 1,2,3,....\infty \tag{10}$$

Сходящаяся П (ПЧ или ПФ) такая, что существует соответственно такое число - a **предел** Пр или такая непрерывная на определенном подинтервале $(c,d) \in (a.b)$ функция – $f(x)$ **предельная функция** ПрФ, что при ($n \ge N$) все элементы этой П удовлетворяют неравенству

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \ge N(\varepsilon) \tag{11}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in (c,d) \in (a,b), n \ge N(x,\varepsilon) \tag{12}$$

Равномерная сходимость ПФ такая, что номер $N(x,\varepsilon)$ не зависит от x для всех $x \in (c,d) \in (a,b)$

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists N(\varepsilon) \to \exists f_n(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in (c,d), n \ge N(\varepsilon), (c,d) \in (a,b) \tag{13}$$

1.2. Ряды числовые и функциональные. Сходимости ФР (равномерная, в среднем, в среднеквадратичном) на заданном интервале.

Ряд (Р) числовой (РЧ) или функциональный (РФ) – это **сумма бесконечного числа элементов последовательности**

$$R(a) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{14}$$

$$R\{f(x)\} = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{15}$$

Частичная сумма ряда (ЧСР) – это сумма конечного числа слагаемых (элементов П)

$$S_n(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{16}$$

$$S_n\{f(x)\} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \tag{17}$$

Ряд (числовой или функциональный) **сходящийся** если **последовательность частичных сумм сходящаяся .**

$$|S_n(a) - S| < \varepsilon, n \ge N(\varepsilon) \tag{18}$$

$$|S_n\{f(x)\} - S(x)| < \varepsilon, n \ge N(\varepsilon, x) \tag{19}$$

Суммой ряда (РС) называется число (или функция), к которому стремится частичные суммы ряда при неограниченном увеличении числа слагаемых.

Остаток ряда (ОРС)- разность суммы ряда и его частичной суммы

$$R_n\{f(x)\} = S\{f(x)\} - S_n\{f(x)\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

Ряд функциональный равномерно сходящийся если последовательность частичных сумм функционального ряда равномерно сходящаяся.

$$\forall \varepsilon > 0 \to \exists N(\varepsilon) \to \exists S_n\{f(x)\} \Rightarrow \left|S_n\{f(x)\} - S(x)\right| < \varepsilon, x \in (c,d), n \geq N(\varepsilon) \quad (20)$$

1.2.1. Свойства равномерно сходящихся рядов:

- **от перестановки мест** слагаемых сходимость рядов **не нарушается** ;
- **от сочетания элементов** сходимость **не нарушается ;**
- **распределительное** свойство **сохраняется ;**
- **сумма** ряда **непрерывная** функция;
- **интеграл от суммы** ряда **равен сумме от интегралов**

$$\int_a^x S\{f(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} S_n\left\{\int_a^x f(x)dx\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(x)dx \quad (21)$$

- **производная от суммы** равна **сумме производных;**

$$\frac{dS\{f(x)\}}{dx} = S\left\{\frac{df}{dx}\right\} = \lim_{n\to\infty} S_n\left\{\frac{df}{dx}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{df_n(x)}{dx} \quad (22)$$

1.2.2. Признаки сходимости рядов:

- **признак сравнения** *(Вейерштрасса-K.T.W.Weierstrases-1886)* **мажорирования** с числовым рядом из положительных элементов, больших абсолютных значений сравниваемого ряда

$$|a_n| < b_n \quad (23)$$

$$|f_n(x)| < b_n, x \in (c,d) \quad (24)$$

- **оценка остаточной суммы**

$$\lim_{n\to\infty} R_n\{f(x)\} = 0, x \in (c,d) \quad (25)$$

1.2.3. Критерии сходимости функциональных рядов для произвольных функциональных последовательностей:

- **сходимость в среднем** на заданном интервале

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^d \left|S(x) - S_n\{f(x)\}\right|dx = \lim_{n\to\infty}\int \left|S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|dx = 0 \quad (26)$$

- **сходимость в среднеквадратичном** на заданном интервале

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{d\int_{c}(S\{f(x)\}-S_n\{f(x)\})^2dx}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_{c}^{d}(S(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x))^2dx}=0 \qquad (27)$$

- **сходимость равномерная** на заданном интервале

$$\lim_{n\to\infty}\left|S\{f(x)\}-S_n\{f(x)\}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|=0, x\in(c,d) \qquad (28)$$

1.3. Функциональные ряды. Фундаментальная система функций. Коэффициенты разложения .

Фундаментальной системой функций называется последовательность функций, заданная на определенном интервале как функция $(f_n(x)=f(x,n))$ независимой переменной $(x\in(a,b))$ и натурального числа (n).

Разложением заданной функции ($\varphi(x)$) на заданном интервале ($x\in(a,b)$) по заданной фундаментальной системе функций ($f_n(x)$) называется функция $\Phi(x)$, определенная равенством

$$\varphi(x)\Rightarrow\Phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nf_n(x) \qquad (29)$$

$\{a_n\}$**-коэффициенты разложения,** определяемые по соответствующему закону.

1.3.1. Степенные ряды *(Маклорена и Тейлора-C.Maclaurin-1722 end Taylor B.-1712)* в окрестности начала координат ($x=0$) и в окрестности произвольной точки $x_0\neq 0$.

$$f_n(x)=x^n;\to\varphi(x)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n;\to a_n=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!};\to\varphi^{(n)}(0)\equiv\left.\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right|_{x=0} \qquad (30)$$

$$f_n(x)=(x-x_0)^n;\to\varphi(x)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n;\to a_n=\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!};\to\varphi^{(n)}(x_0)\equiv\left.\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right|_{x=x_0} \qquad (31)$$

1.3.2 Обобщенные ряды Фурье (*Фурье-J.B.J.Fouirer-1795*).

Ортогональная фундаментальна система функций – это система функций, функционал которых – **скалярное произведение** (интегралы от произведений функций с разными индексами -номерами) равно нулю для произведений с функций разными номерами и не равно нулю с одинаковыми .

$$\int_a^b f_n(x)f_m(x)dx=a_{nm}=0 \qquad \int_a^b f_n^2(x)dx=a_{nn}^2\neq 0 \qquad (32)$$

Ортонормированная фундаментальная система функций – это система нормированных ортогональных функций (в качестве нормы функций приняты корни квадратные от чисел $a_{nn}^2\Rightarrow\|f_n(x)\|=a_{nn}$), что дает

$$\tilde{f}_n(x)=\frac{f_n(x)}{\|f_n(x)\|} \qquad \int_a^b\tilde{f}_n(x)\tilde{f}_m(x)dx=\tilde{a}_{nm}=0 \qquad \int_a^b\tilde{f}_n^2(x)dx=1 \qquad (33)$$

Разложение заданной на интервале функции по ортонормированной системе функций (**обобщенный ряд Фурье)**

$$\varphi(x) \Rightarrow \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{f}_n(x); \qquad a_n = \int_a^b \varphi(x)\widetilde{f}_n(x)dx \tag{34}$$

$\{a_n\}$- **обобщенные коэффициенты Фурье.**

2. Тригонометрические ряды Фурье-Эйлера *(Л.Эйлер-L.Euler-1748).*

Ряды, фундаментальная система функций которого элементарные тригонометрические функции **– синус и косинус-**функциональные ряды **Фурье-Эйлера**

$$\varphi_{1n}(x) = \cos(\frac{n\pi x}{l}); \qquad \varphi_{2n}(x) = \sin(\frac{n\pi x}{l}); \qquad \varphi_{10}(x) = 1; \tag{35}$$

Фундаментальные функции **периодические с периодом** ($2T = 2l$), **ортогональны** на произвольном интервале $(x \in (a,b); 2l = (b-a))$ или на **«стандартном» интервале** $(x \in (-l,l); 2l = (b-a))$. **Ортонормированная** по норме $(\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{l})$ на указанных интервалах **фундаментальная система тригонометрических функций**

$$\widetilde{\varphi}_{1n}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\cos(\frac{n\pi x}{l}); \qquad \widetilde{\varphi}_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin(\frac{n\pi x}{l}); \qquad \widetilde{\varphi}_{10}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}; \tag{36}$$

2.1. Ряд Фурье-Эйлера на основном **интервале (**$-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$**)**

- **фундаментальная система**

$$\varphi_{1n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx); n = 0,1,2,...\infty; \qquad \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx); n = 1,2,...\infty; \tag{37}$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x) = f(x + 2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{38}$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx; \tag{39}$$

2.2. Ряд Фурье-Эйлера на основном **интервале (**$-l \le x \le l, 2T = 2l$**)**

- **фундаментальная система**

$$\varphi_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\cos(\frac{n\pi x}{l});n=0,1,2,...\infty;\quad \varphi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\sin(\frac{n\pi x}{l});n=1,2,...\infty; \qquad (40)$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x)=f(x+2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x)\Rightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{l})+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{n\pi x}{l}) \qquad (41)$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx;\quad a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l\pi}f(x)dx;\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx; \qquad (42)$$

2.3. Ряд Фурье-Эйлера на основном **интервале (**$a\le x\le b, 2T=2l=(b-a)$**)**

- **фундаментальная система**

$$\varphi_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{b-a}{2}}}\cos(\frac{2n\pi x}{b-a});n=0,1,2,...\infty;\qquad \varphi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{b-a}{2}}}\sin(\frac{2n\pi x}{b-a});n=1,2,...\infty; \qquad (43)$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x)=f(x+2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x)\Rightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{2n\pi x}{b-a})+\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\frac{2n\pi x}{b-a}) \qquad (44)$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\cos(\frac{2n\pi x}{b-a})dx;\quad a_0=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx;\quad b_n=\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\sin(\frac{2n\pi x}{b-a})dx; \qquad (45)$$

Лекция 2. Ряды Фурье-Эйлера для четных и нечетных функций на основных интервалах. Сходимость рядов Фурье-Эйлера. Приложение рядов Фурье-Эйлера.

2.1. Четные функции. Ряды Фурье-Эйлера для четных функций.

Функции **, не меняющие своего значения при изменении знака аргумента – четные** $f(x)=f(-x)$**.**

2.1.1. Ряд Фурье-Эйлера четных на основном **интервале (**$-\pi\le x\le\pi, 2T=2l=2\pi$ **)**

- **фундаметальная система**

$$\varphi_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx); n=0,1,2,...\infty; \quad \varphi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx); n=1,2,...\infty; \qquad (1)$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x)=f(x+2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x)\Rightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\frac{a_0}{2} \qquad (2)$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)dx; \quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx; \quad b_n=0; \qquad (3)$$

2.1.2. Ряд Фурье-Эйлера четной на основном **интервале (**$-l\le x\le l, 2T=2l$**)**

- **фундаментальная система**

$$\varphi_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\cos(\frac{n\pi x}{l}); n=0,1,2,...\infty; \quad \varphi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{l}}\sin(\frac{n\pi x}{l}); n=1,2,...\infty; \qquad (4)$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x)=f(x+2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x)\Rightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi x}{l})+\frac{a_0}{2} \qquad (5)$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx; \quad a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l\pi}f(x)dx; \quad b_n=0; \qquad (6)$$

2.2. Нечетные функции. Ряды Фурье-Эйлера для нечетных функций.

Функции**, меняющие свои значения на противоположные по знаку при изменении знака аргумента –нечетные** $f(x)=f(-x)$**.**

2.2.1. Ряд Фурье-Эйлера нечетных на основном **интервале (**$-\pi\le x\le\pi, 2T=2l=2\pi$**)**

- **фундаментальная система**

$$\varphi_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx); n=0,1,2,...\infty; \quad \varphi_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx); n=1,2,...\infty; \qquad (7)$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x)=f(x+2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x)\Rightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx) \qquad (8)$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx; \quad a_0 = a_n = 0; \tag{9}$$

2.2.2. Ряд Фурье-Эйлера нечетной на основном **интервале (**$-l \le x \le l, 2T = 2l$**)**

- **фундаментальная система**

$$\varphi_{1n}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\cos(\frac{n\pi x}{l}); n = 0,1,2,...\infty; \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin(\frac{n\pi x}{l}); n = 1,2,...\infty; \tag{10}$$

-разложение кусочно-непрерывной периодической $f(x) = f(x + 2\pi n)$ функции, заданной на основном интервале

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{11}$$

- **коэффициенты Фурье-Эйлера**

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx; \qquad a_0 = a_n = 0$$

(12)

2.3. Теоремы об условиях сходимости рядов Фурье-Эйлера.

2.3.1. Теорема Дирихле *(Дирихле-L.P.G.Dirichlet -1843*):Если функция **периодична** с периодом, **непрерывна** всюду на кроме быть может, **конечного числа точек разрыва** первого рода, включая граничные точки $(x_k = (-l + 2nl), (l + 2nl))$, и сегмент можно разделить на конечное число подсегментов (подинтервалов), в каждом из которых функция **ограничена и монотонна**, то на **ряд Ф-Э сходится к его сумме**

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{13}$$

в **точках непрерывности равна** $f(x)$, а **в точках разрыва** $x_k; f(x_k - 0) \ne f(x_k + 0)$ **равна полусумме** ее значений слева и справа

$$S(x_k) = \frac{f(x_k - 0) + f(x_k + 0)}{2} \tag{14}$$

Такая функция называется **кусочно-монотонной.**

2.3.2. Теорема Дирихле: Если функция **периодична** с периодом, **непрерывна** всюду на кроме быть может, **конечного числа точек разрыва** первого рода, включая граничные точки $(x_k = (-l + 2nl), (l + 2nl))$, в которых

$$f(x_k) = \frac{f(x_k - 0) + f(x_k + 0)}{2} \tag{15}$$

и сегмент можно разделить на конечное число подсегментов (подинтервалов), в каждом из которых функция **непрерывна и имеет непрерывную производную,** то на **ряд Ф-Э сходится к его сумме**

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \quad (16)$$

в **точках непрерывности равна** $f(x)$ **равномерно,** а **в точках разрыва** $x_k; f(x_k - 0) \neq f(x_k + 0)$ **равна полусумме** ее значений слева и справа

$$S(x_k) = \frac{f(x_k - 0) + f(x_k + 0)}{2} \quad (17)$$

Такая функция называется **кусочно-гладкой.**

2.4. Теоремы об условиях дифференцируемости рядов Фурье-Эйлера.

2.4.1. Теорема 1. Если **функция** $f(x)$ **и все ее производные** $\frac{d^k f}{dx^k}$ **до порядка** (m) включительно **непрерывны** на интервале и удовлетворяют условию **равенства их граничных значений** $f^{(k)}(-l) = f^{(k)}(l)$**,** и , кроме того имеет на этом интервале **кусочно-непрерывную производную** $(m+1)$**–ого порядка,** то ряд Фурье-Эйлера **можно почленно** (m) **раз дифференцировать** на всем интервале

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} \Rightarrow \frac{d^k S(x)}{dx^k} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n\pi}{l})^k (a_n \cos(\frac{n\pi x}{l} - \frac{k\pi}{2}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l} - \frac{k\pi}{2})) \quad (18)$$

2.5. Частичная сумма ряда Фурье-Эйлера, невязка (расхождение, уклонение). Неравенства Бесселя *(Бессель Ф.В.-F.W.Bessel-1807)* и равенство Парсеваля (*Парсеваль-M.Parseval-1805)*-Ляпунова *(Ляпунов А.М.-1895 -)*для коэффициентов Фурье-Эйлера.

2.5.1. Частичная сумма- это сумма с конечным числом слагаемых ряда

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \quad (19)$$

Расхождением (невязкой, уклонением) называется **разность** и служит для оценки

$$\delta_m(x) = |f(x) - S_m(x)| \quad (20)$$

как сходимости рядов так и для оценки точности в задачах приближения функции. Эта величина характеризует наибольшее уклонение. Более естественно использовать в качестве меры погрешности **среднее квадратичное уклонение**, которое определяется равенством

$$\tilde{\delta}_m^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - S_m(x)]^2 dx \quad (21)$$

и минимизацией которого достигается **задача о наилучшем приближении** функции. Среди всех тригонометрических многочленов заданного порядка наименьшее квадратичное уклонение от функции имеет тот многочлен, коэффициенты которого суть коэффициенты Фурье-Эйлера.

2.5.2. Характер зависимости коэффициентов Фурье-Эйлера от номера: функция на интервале $(-l,l)$ кусочно-непрерывна, то соответствующие ей коэффициенты Фурье-Эйлера стремятся к нулю при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0; \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \tag{22}$$

2.5.3. Неравенство Бесселя для коэффициентов Фурье-Эйлера для произвольной функции

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx \ge \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right) \tag{23}$$

2.5.4. Равенство Ляпунова-Парсеваля для всякой ограниченной кусочно-монотонной функции

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right) \tag{24}$$

2.5.6. Полнота фундаментальной системы функций в **смысле средне квадратичного.** Система фундаментальных функций называется полной в смысле среде квадратичного, если соответствующий функции функциональный ряд сходится в средне квадратичном, т.е.

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{25}$$

$$\tilde{\delta}_m^2 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left[f(x) - S_m(x)\right]^2 dx \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\delta}_n = 0; \tag{27}$$

2.5.7. Эффект Гиббса *(Гиббс Дж.У.-J.W.Gibs-1873)* (**неустранимая погрешность** в **окрестности точек разрыва**): если периодическая кусочно-гладкая функция $f(x)$ на имеет конечное число точек разрывов, в которых значение функции равно среднему $f(x_k) = \dfrac{f(x_k - 0) + f(x_k + 0)}{2}$ значению , а в точках непрерывности имеет непрерывную вторую производную, то в сколь угодно малой окрестности можно найти такие точки, что при любом $n > N$ **разность частичной суммы и среднего значения** в точке **больше** этого **среднего**

$$\left|S_n(x) - f(x_k)\right| > Lf(x_k); l > 1 \tag{28}$$

2.6. Приложение рядов Фурье-Эйлера.

2.6.1. Приближение (аппроксимация) функций (гармонический анализ).

Постановка задачи: Найти такой тригонометрический полином для кусочно-непрерывной на заданном интервале функции, который наилучшим способом приближал значения аппроксимируемой функции.

Решение задачи аппроксимации (гармонический анализ) – тригонометрический полином для функции ($f(x), x \in (a,b); 2T = 2l = b - a$) продолженной периодическим образом на всю числовую ось берется в форме

$$f(x) \Rightarrow T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{29}$$

где коэффициенты (c_n, d_n) согласно теоремы о наилучшем приближении есть коэффициенты Фурье-Эйлера

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx; \quad a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx; \quad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right)dx; \tag{30}$$

погрешность приближения при этом оценивается по среднеквадратичному

$$\tilde{\delta}_N^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x) - T_N(x)\right]^2 dx \tag{31}$$

и по заданному допуску определяется порядок (N) тригонометрического полинома.

2.6.2. Применение рядов Фурье-Эйлера при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с неоднородной правой чатью-кусочно-непрерывной функцией.

Постановка задачи: найти в классе (N) раз дифференцируемых непрерывных функций решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка N

$$E^{(N)}\{y(x)\} = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y}{dx^n} = f(x), x \in (a,b)$$
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & при \quad a \le x < a_1 \\ f_2(x) & при \quad a_1 \le x < a_2 \\ f_3(x) & при \quad a_2 \le x \le b \end{cases} \tag{32}$$
$$L_n^{(K)}\{y(x)\}\Big|_a^b = A_n\Big|_a^b$$

Аппроксимируя правую часть уравнения тригонометрическим рядом Фурье-Эйлера на интервале $f(x), x \in (a,b); 2T = 2l = b - a$

$$f(x) \Rightarrow T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} d_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \qquad (33)$$

с коэффициентами

$$f(x) \Rightarrow T_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} d_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \qquad (34)$$

преобразуем исходную задачу для уравнения с разрывной правой частью $f(x)$ в редуцированную задачу для уравнения с непрерывной правой частью $T_N(x)$

$$\begin{aligned} &E^{(N)}\{y(x)\} = \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y}{dx^n} = T_N(x), x \in (a,b) \\ &L_n^{(K)}\{y(x)\}\Big|_a^b = A_n\Big|_a^b \end{aligned} \qquad (35)$$

Разлагая искомое решение на общее решение однородного и частное неоднородного уравнения имеем

$$\begin{aligned} &y(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n \tilde{y}_n(x) + Y(x); \\ &\tilde{y}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\nu_k x}}{\prod\limits_{l=1, l\neq k}^{N} (\nu_k - \nu_l)}; Y(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e^{\nu_k x}}{\prod\limits_{l=1, l\neq k}^{N} (\nu_k - \nu_l)} \int e^{-\nu_k x} T_N(x) dx; \\ &\sum_{n=0}^{N} a_n \nu^n = 0 \end{aligned} \qquad (36)$$

где произвольные постоянные C_n интегрирования определяются из граничных условий, а характеристические (ν_n) числа (показатели) – из соответствующего векового (характеристического уравнения). Здесь приведена формула для частного решения в случае действительных простых (некратных) показателей. Для кратных в указанной формуле следует провести предельный переход, а для комплексно-сопряженных простых (некратных) следует учесть произведения комплексно-сопряженных чисел.

2.7. ПРИМЕРЫ.

Задание № 1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье-Эйлера на интервале $x \in [-l, l]$, удерживая первые восемь не нулевых слагаемых

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & при \quad -l \le x < -\frac{l}{3} \\ \varphi_2(x) & при \quad -\frac{l}{3} \le x < \frac{l}{4} \\ \varphi_3(x) & при \quad \frac{l}{4} \le x \le l \end{cases}$$

Построить график функции $f(x)$ $x \in [-l, l]$. В точках разрыва $f(x)$ указать значения $S(x)$ ряда Фурье-Эйлера для этой функции. В рассматриваемом варианте

$$_1\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = 2, \varphi_3(x) = 1 - x, l = 2$$

РЕШЕНИЕ. Период функции $2T = 2l = 2, \frac{l}{4} = \frac{1}{2}, \frac{l}{3} = \frac{2}{3}$. Используя формулы для коэффициентов Ф-Э, имеем

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-\frac{2}{3}} 1dx + \int_{\frac{-2}{3}}^{\frac{1}{2}} 2dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (1-x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-2}^{-2/3} + 2x\Big|_{-2/3}^{1/4} + x\Big|_{1/4}^{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{1/4}^{2}\right) = \frac{53}{36}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-\frac{2}{3}} 1\cos(\frac{n\pi x}{2})dx + \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{2}} 2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (1-x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2/3}^{1/2} - \left(\frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{1/2}^{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{1/2}^{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2n\pi}\sin(\frac{n\pi}{8}) - \frac{4}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi}{8}) + \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{3}) + (-1)^n\frac{4}{(n\pi)^2}\right); n = 1,2,3,..\infty$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-\frac{2}{3}} 1\sin(\frac{n\pi x}{2})dx + \int_{-\frac{3}{3}}^{\frac{1}{2}} 2\sin(\frac{n\pi x}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (1-x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{2} - \frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2/3}^{1/2} - \left(-\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{1/2}^{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{1/2}^{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2n\pi}\cos(\frac{n\pi}{8}) - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{8}) + \frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{3}) + (-1)^n\frac{4}{(n\pi)^2}\right); n = 1,2,3,...\infty$$

В точках разрыва значения сумм ряда соответственно равны

$$S(-2) = S(2) = 0; \quad S(-\frac{2}{3}) = \frac{3}{2}; \quad S(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4};$$

Задание № 2. С помощью ряда Фурье-Эйлера найти решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (изгиба однородной балки постоянного поперечного сечения из линейно упругого материала)

$$a^2\frac{d^4y}{dx^4} = q(x), a^2 = EI$$

где : $y(x)$- прогиб срединной линии балки; EI- момент инерции прямоугольного сечения балки относительно оси перпендикулярной плоскости изгиба; при граничных (краевых условиях) соответствующих схеме, указанной в таблице № 1.

Функция $q(x), x \in [0,l]$ в правой части уравнения кусочно-непрерывная и ограничена на интервале

$$q(x) = \begin{matrix} \varphi_1(x) & при & 0 \le x < \frac{l}{4} \\ \varphi_2(x) & при & \frac{l}{4} \le x < \frac{l}{2} \\ \varphi_3(x) & при & \frac{l}{2} \le x \le l \end{matrix}$$

Схема краевой задачи приведена на таблице № 2. Вычислить, учитывая первые восемь отличных от нуля члена ряда, значения функции и при $x \in (0,l)$. В рассматриваемом варианте $(\varphi_1(x) = q_0, \varphi_2(x) = 2q_0, \varphi_3(x) = q_0(1-\frac{x}{l}),)$, а схема закрепления I (шарнирное закрепление)- равны нулю прогибы $y(0) = y(l) = 0$ и изгибающие моменты $M(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2}; M(0) = M(l) = 0; \to y''(0) = y''(l) = 0$ конечных точек.

РЕШЕНИЕ. Представляя кусочно-непрерывную правую часть уравнения (нагрузку) непрерывной с помощью разложения Фурье-Эйлера по синусам

$$q_n = \frac{2}{l}\int_0^l q(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{2}{l}(\int_0^{l/4} q_0\sin(\frac{n\pi x}{l})dx + \int_{l/4}^{l/2} 2q_0\sin(\frac{n\pi x}{l})dx + \int_{l/2}^{l} q_0(1-\frac{x}{l})\sin(\frac{n\pi x}{l})dx) =$$

$$= \frac{2q_0}{l}(-\frac{l}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{l})\Big|_0^{l/4} - \frac{2l}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{l})\Big|_{l/4}^{l/2} - \frac{l}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{l})\Big|_{l/2}^{l} + \frac{xl}{n\pi l}\sin(\frac{n\pi x}{l})\Big|_{l/2}^{l} - \frac{l^2}{(n\pi)^2 l}\cos(\frac{nx}{l})\Big|_{l/2}^{l}) =$$

$$= \frac{2q_0}{l}(-\frac{l}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{4}) + \frac{l}{n\pi} - \frac{2l}{n\pi}\cos(\frac{n}{2}) + \frac{2l}{n\pi} - \frac{l}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{l}{n\pi} -$$

$$- \frac{l^2}{2n\pi l}\sin(\frac{n\pi}{2}) - \frac{l^2}{(n\pi)^2 l}(-1)^n + \frac{l^2}{(n\pi)^2 l}\cos(\frac{n\pi}{2})); q(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(\frac{n\pi x}{l});$$

после интегрирования получим

$$EIy(x) = C_4\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\frac{l}{n\pi})^4 \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

После подстановки в краевые условия получаем

$$C_4 = C_3 = C_2 = C_1 = 0 \qquad EIy(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\frac{l}{n\pi})^4 \sin(\frac{n\pi x}{l})$$

и значение прогиба в середине пролета будет

$$EIy(x = \frac{l}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\frac{l}{n\pi})^4 \sin(\frac{n\pi}{2})$$

Литература.

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П., Краткий курс высшей математики. -М.: Наука, 1986 . -576 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М.. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. –М.: Наука, 1989. –464 с.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа –М.: Наука, 1967. – 571 с.

4. Овчинников П.Ф., Лисицын Б.М., Михайленко В.М.. Высшая математика. –К.: Выща шк., 1989. –679 с.

5. Долгов Н.М.. Высшая математика. –К.: Выща шк., 1988. – 416 с.

6. Романовский П.И.. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. –М.: Наука, Физматгиз. 1973.- 336 с.

7. Будак Б.М., Фомин С.В.. Кратные интегралы и ряды. –М.: Наука, Физматгиз. 1967. – 607 с.

8. Лопаницын Е.А.. Ряды Фурье. (Методические указания). –М.: МАМИ, 1988.-37с.

9. Коган Е.А., Попович В.Е.. Ряды Фурье. Дифференциальные уравнения в частных производных. Теория вероятностей. Ч.2.(Методическое пособие № 1393 (1155)).-М.: МАМИ. 1988. –99с.

10. Коган Е.А., Лопаницын Е.А. Ряды Фурье. Уравнения математической физики. (Методическое пособие).-М.: МАМИ. 2004. –89с.

11. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1-2. /Болгов В.А., Ефимов А.В., Каракулин А.Ф., Коган С.М., Лунц Г.Л., Поспелов А.С., Фролов С.В., Шостак Р.Я., Янполский А.Р..-М.: Наука, Физматгиз, 1986. –426 с.,– 368с.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА по разделу РЯДЫ ФУРЬЕ-ЭЙЛЕРА

Задание № 1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье-Эйлера на интервале $[-l,l]$

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & при \quad -l\le x<-\dfrac{l}{3}\\ \varphi_2(x) & при \quad -\dfrac{l}{3}\le x<\dfrac{l}{4}\\ \varphi_3(x) & при \quad \dfrac{l}{4}\le x\le l\end{cases}$$

Значения l и выражения $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ приведены в таблице № 1.1. Построить график функции $f(x)$ $x\in[-l,l]$. В точках разрыва указать значения суммы $S(x)$ ряда Фурье-Эйлера для этой функции.

Задание № 2. С помощью ряда Фурье найти решение краевой задачи, формулировка которой приведена в таблице № 1.2. Функция $q(x)$ в правой части уравнения кусочно- непрерывная м ограниченная на интервале $[-l,l]$. Схему краевой задачи и выражения функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ взять из таблицы № 1.3. Вычислить три отличных от нуля члена ряда, значения функции $y(x)$ в величинах $\dfrac{q_0l^4}{a^2}$ и $y'(x)$ в величинах $\dfrac{q_0l^3}{a^2}$ при $x=\dfrac{l}{2}$: a^2, q_0 и $l-$ константы

Распределение составляющих $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ нагрузки $q(x)$ по длине балки $x\in[0,l]$

$$q(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & при \quad 0\le x<\dfrac{l}{4}\\ \varphi_2(x) & при \quad \dfrac{l}{4}\le x<\dfrac{l}{2}\\ \varphi_3(x) & при \quad \dfrac{l}{2}\le x\le l\end{cases}$$

Таблица № 1.2. Краевые условия для различных схем (номеров I,II и III)

$$a^2\frac{d^4y}{dx^4}=q(x);$$

$$I:\Rightarrow\begin{cases}y(0)=0;\\ y(l)=0;\\ y''(0)=0;\\ y''(l)=0;\end{cases}\quad II:\Rightarrow\begin{cases}y(0)=0;\\ y(l)=0;\\ y'(0)=0;\\ y''(l)=0;\end{cases}\quad III:\Rightarrow\begin{cases}y(0)=0;\\ y(l)=0;\\ y'(0)=0;\\ y'(l)=0;\end{cases}$$

Таблица № 1.1. Значения составляющих $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ функции

№ варианта	l	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
1	2	1	2	$1-x$
2	1	-1	2	$x-1$
3	2	x	1	$-x$
4	3	-1	$1-x$	1
5	π	2	1	x
6	4	0	x	-1
7	1	1	$1+x$	1
8	2	$-x$	1	2
9	3	-1	2	x
1 0	2	$-x$	2	x
11	4	2	1	x
12	1	1	2	$1-x$
13	2	-1	2	$1+x$
14	3	0	x	$2x-1$
15	4	$2-x$	1	$2+x$
16	1	$x+1$	2	$1-x$
17	π	$1-x$	0	x
18	3	1	x	2
19	2	$x+1$	2	$-x$
20	1	x	1	2
21	π	-1	0	1
22	4	x	2	$-x$
23	3	$-x$	3	x
24	2	1	x	-1
25	1	0	x	2
26	π	-1	x	1
27	1	-1	$x+1$	1
28	2	x	1	$-x$
29	3	2	$1-x$	2
30	4	3	$2x$	-3

Таблица № 1.3. Схемы (номера I,II и III), составляющие нагрузки $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$.

№ варианта	*№ схемы*	$\varphi_1(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_1(x)$
1	*I*	q_0	$2q_0$	$q_0(1-x/l)$
2	*II*	$2q_0$	0	q_0
3	*II*	0	$q_0 x/l$	q_0
4	*I*	$q_0 \frac{x}{l}$	q_0	0
5	*II*	q_0	$q_0(1-x/l)$	0
6	*III*	0	q_0	0
7	*I*	0	$q_0(1-x/l)$	$2q_0$
8	*II*	q_0	$2q_0$	$3q_0$
9	*III*	q_0	$2q_0$	q_0
1 0	*I*	0	q_0	$q_0 x/l$
11	*II*	q_0	0	q_0
12	*III*	0	q_0	0
13	*I*	q_0	q_0	q_0
14	*II*	$q_0 x/l$	0	$q_0 x/l$
15	*III*	q_0	$q_0 x/l$	q_0
16	*I*	$2q_0$	q_0	$2q_0$
17	$II\pi$	$q_0/3$	$q_0 x/l$	q_0
18	*III*	0	$q_0(1-x/l)$	q_0
19	*I*	$3q_0$	0	0
20	*II*	$3q_0$	$2q_0$	q_0
21	*III*	0	q_0	0
22	*I*	$-q_0$	0	q_0
23	*II*	0	0	q_0
24	*III*	q_0	$2q_0 x/l$	0
25	*I*	0	$q_0 x/l$	0
26	*II*	$q_0 x/l$	q_0	$3q_0$
27	*III*	$3q_0$	$q_0 x/l$	0
28	*I*	$q_0 x/l$	q_0	0
29	*II*	0	$q_0 x/l$	q_0
30	*III*	q_0	0	$2q_0$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению РГР по разделу «Элементы функционального анализа, обобщенные ряды Фурье и тригонометрические ряды Фурье – Эйлера», курса «Специальные главы высшей математики».

(4-ый семестр, 2-ой курс, поток АЭ 8-13, 2006 г.)

Задача № 1. Разложить заданную на отрезке $x \in [-l, l]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & при \quad -l \le x < 0; \\ f_2(x) & при \quad 0 \le x < l/2; \\ f_3(x) & при \quad l/2 \le x \le l; \end{cases}$$

в ряд Фурье - Эйлера; построить график заданной функции на отрезке $x \in [-l, l]$ и продлить ее периодическим образом; определить выражения коэффициентов Фурье – Эйлера и вычислить первые ($N = 8$, восемь) коэффициентов Фурье – Эйлера; построить график частичной суммы S_N полученного ряда Фурье - Эйлера на отрезке $x \in [-l, l]$; в точках разрыва указать значения частичной суммы S_N.

Порядок выполнения:

1). Построить **декартову систему координат** с масштабами по осям; на основном периоде $[-l \le x \le l]$ **изобразить заданную кусочно–непрерывную функцию** $f(x)$.

2). **Продлить влево и вправо периодическим образом** $f(x) = f(x + 2lk), k = 1,2,...$ заданную на основном периоде функцию.

3). **Записать ряд Фурье – Эйлера** для периодической функции, заданной на основном интервале $[-l \le x \le l]$

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l};$$

4). Записать **выражения коэффициентов ряда Фурье – Эйлера** для заданной кусочно – непрерывной функции в виде суммы интегралов по участкам

$$a_n = \frac{1}{l}\{\int_{-l}^{0} f_1(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{0}^{l/2} f_2(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{-l/2}^{l} f_3(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\};$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\{\int_{-l}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{l/2} f_2(x)dx + \int_{-l/2}^{l} f_3(x)dx\};$$

$$b_n = \frac{1}{l}\{\int_{-l}^{0} f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{0}^{l/2} f_2(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{-l/2}^{l} f_3(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\};$$

5). Используя значения функции на участках, проинтегрировать выражения коэффициентов Фурье – Эйлера, и подставить соответствующие пределы на участках; при вычислениях использовать значения тригонометрических функций: $\sin n\pi = 0; \cos n\pi = (-1)^n; \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n; \quad \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$ и табличные интегралы

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}; \quad \int \sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}; \quad \int x\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + (\frac{l}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$\int \cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}; \quad \int x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l} + (\frac{l}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{l};$$

6). **Вычислить первые восемь значений коэффициентов Фурье – Эйлера** для $n = 8$ и **построить график изменения этих коэффициентов** с увеличением их номера $n; \quad a_n = a_n(n), b_n = b_n(n);$ **определить порядок убывания** абсолютного значения коэффициентов.

7). Записать **выражение частичной суммы** ряда Фурье – Эйлера и построить график этой суммы $S_N(x, N) \sim N$

$$S_N(x,N) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{l};$$

8). Вычислить **значения частичной суммы ряда** в точках сопряжения участков; определить значения **в точках разрыва.**

9). Все вычисления и графические построения могут быть произведены на РЭВМ с использованием каких – либо вычислительных систем, например, системы MATHCAD.

Пример:

Задана на интервале $x \in [-3,3], \quad l = 3$ кусочно – непрерывная функция

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 0 & при \quad -l \le x < 0; \\ f_2(x) = \frac{2}{3}x & при \quad 0 \le x < l/2; \\ f_3(x) = 0 & при \quad l/2 \le x \le l; \end{cases}$$

при $l = 3, \quad \pi = 3.14159, \quad N = 20, \quad x \in [-3l = -9, 3l = 9]; \quad n = 0,1,...,20; \quad S_{20}(x)$.

Выражения для коэффициентов Фурье – Эйлера имеют вид

$$a_n = \frac{2}{3l}(\frac{xl}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l} + (\frac{l}{n\pi})^2\cos\frac{n\pi x}{l})\Bigg|_0^{l/2} = \frac{l}{n\pi}(\sin\frac{n\pi}{2} + (\frac{1}{n\pi})(\cos\frac{n\pi}{2} - 1)); \quad a_0 = \frac{2}{3l}(\frac{x^2}{2})\Bigg|_0^{l/2} = \frac{l}{12};$$

$$b_n = \frac{2}{3l}(-\frac{xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + (\frac{l}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi x}{l})\Bigg|_0^{l/2} = \frac{l}{n\pi}(-\cos\frac{n\pi}{2} + (\frac{1}{n\pi})\sin\frac{n\pi}{2});$$

значения тригонометрических функций для указанных аргументов такие

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & при \quad n = 2k, \ k = 0,1,2,... \\ 1 & при \quad n = 4k+1, \\ -1 & при \quad n = 4k+3, \end{cases} \qquad \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & при \quad n = 2k+1, \ k = 0,1,2,... \\ 1 & при \quad 4k+4, \\ -1 & при \quad 4k+2 \end{cases}$$

Выражения коэффициентов Фурье – Эйлера

$$a_n=\begin{cases} {l(n\pi-2)}\big/{2n^2\pi^2} & при \quad n=4k+1 \\ -{2l}\big/{n^2\pi^2} & при \quad n=4k+2 \\ -{l(n\pi+2)}\big/{2n^2\pi^2} & при \quad n=4k+3 \\ 0 & при \quad n=4k+4 \end{cases};\qquad b_n=\begin{cases} {l}\big/{n^2\pi^2} & при \quad n=4k+1 \\ {l}\big/{2n\pi} & при \quad n=4k+2 \\ -{l}\big/{n^2\pi^2} & при \quad n=4k+3 \\ -{l}\big/{n\pi} & при \quad n=4k+4 \end{cases}$$

В системе **MATHCAD** реализация задания этого примера выглядит так, как приведено в **приложении** №1.

Задача № 2. Найти решение $y(x)$ в виде ряда Фурье – Эйлера для краевой задачи

$$y''+a_1y'+a_0y=q(x);\quad x\in[0,l];\quad y(0)=y_0;\quad y(l)=y_l;$$

для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентам и неоднородной правой частью – кусочно – непрерывной на отрезке - полупериоде $x\in[0,l]$ функцией

$$q(x)=\begin{cases} q_1(x) & при \quad 0\le x<{l}\big/{2}; \\ q_2(x) & при \quad {l}\big/{2}\le x\le l; \end{cases}$$

представимой неполным рядом Фурье – Эйлера (нечетным образом) на основном периоде $x\in[-l,l]$; построить график заданной функции на отрезке $x\in[-l,l]$ и продлить ее периодическим образом; определить выражения коэффициентов Фурье – Эйлера и вычислить первые ($N=8,$ восемь) коэффициентов Фурье – Эйлера; построить график частичной суммы S_N полученного ряда Фурье - Эйлера на отрезке $x\in[-l,l]$; в точках разрыва указать значения частичной суммы S_N; определить значение частичной суммы в середине полупериода $x=\dfrac{l}{2}$.

Порядок выполнения:

1). Построить **декартову систему координат** с масштабами по осям; на основном полупериоде $[0\le x\le l]$ **изобразить заданную кусочно – непрерывную функцию** $q(x)$ и **продлить ее на вторую часть** основного периода **нечетным образом** $q(x)=-q(-x)$.

2). **Продлить влево и вправо периодическим образом** $q(x)=q(x+2lk),k=1,2,...$ заданную на основном периоде функцию.

3). **Записать неполный ряд Фурье – Эйлера (по синусам)** для периодической функции, заданной на основном интервале $[-l\le x\le l]$- **аппроксимировать кусочно – непрерывную** $q(x)$ функцию **непрерывной** $S(x)$

$$q(x)\Rightarrow S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l};$$

4). Записать **выражения коэффициентов ряда Фурье – Эйлера** для заданной кусочно – непрерывной функции в виде суммы интегралов по участкам

$$b_n=\frac{2}{l}\{\int_0^{l/2}q_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{l/2}^{l}q_2(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx);$$

5). Используя значения функции на участках, проинтегрировать выражения коэффициентов Фурье – Эйлера, и подставить соответствующие пределы на участках; при вычислениях использовать значения тригонометрических функций: $\sin n\pi = 0; \cos n\pi = (-1)^n; \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n; \quad \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$ и табличные интегралы

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}; \quad \int \sin\frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}; \quad \int x\sin\frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + (\frac{l}{n\pi})^2 \sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$\int \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}; \quad \int x\cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l} + (\frac{l}{n\pi})^2 \cos\frac{n\pi x}{l};$$

6). **Вычислить первые восемь значений коэффициентов Фурье – Эйлера** для $n = 8$ и **построить график изменения этих коэффициентов** с увеличением их номера n; $b_n = b_n(n)$; **определить порядок убывания** абсолютного значения коэффициентов.

7). Записать **выражение частичной суммы** ряда Фурье – Эйлера и построить график этой суммы $S_N(x, N) \sim N$

$$S_N(x, N) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{l};$$

8). Вычислить **значения частичной суммы ряда** в точках сопряжения участков; определить значения **в точках разрыва.**

9). Проинтегрировать неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью – непрерывной функцией $S(x)$

$$y(x) = \bar{y}(x) + Y(x) = C_1\bar{y}_1(x) + C_2\bar{y}_2(x) + \frac{e^{\nu_1 x}}{\nu_1 - \nu_2}\int e^{-\nu_1 x} S(x)dx + \frac{e^{\nu_2 x}}{\nu_2 - \nu_1}\int e^{-\nu_2 x} S(x)dx;$$

$$\bar{y}_1(x) = e^{\nu_1 x}; \quad \bar{y}_2(x) = e^{\nu_2 x}; \quad \{\nu_1, \nu_2\} \Leftarrow \nu^2 + a_1\nu + a_0 = 0;$$

10). Определить постоянные интегрирования C_1, C_2 по заданным краевым условиям (первого, второго или третьего рода)

$$C_1 + C_2 + \left(\frac{e^{\nu_1 x}}{\nu_1 - \nu_2}\int e^{-\nu_1 x} S(x)dx + \frac{e^{\nu_2 x}}{\nu_2 - \nu_1}\int e^{-\nu_2 x} S(x)dx\right)\Bigg|_{x=0} = y_0;$$

$$C_1 e^{\nu\, l} + C_2 e^{\nu_2 l} + \left(\frac{e^{\nu_1 x}}{\nu_1 - \nu_2}\int e^{-\nu_1 x} S(x)dx + \frac{e^{\nu_2 x}}{\nu_2 - \nu_1}\int e^{-\nu_2 x} S(x)dx\right)\Bigg|_{x=l} = y_l;$$

11). Записать окончательно выражение искомой функции, ограничиваясь в представлении правой части уравнения вместо ряд его частичной суммой

$$y(x) = C_1\bar{y}_1(x) + C_2\bar{y}_2(x) + \frac{e^{\nu_1 x}}{\nu_1 - \nu_2}\int e^{-\nu_1 x} S_N(x)dx + \frac{e^{\nu_2 x}}{\nu_2 - \nu_1}\int e^{-\nu_2 x} S_N(x)dx;$$

12). Вычислить значение искомой функции (для частичной суммы) в середине полупериода

$$y(\frac{l}{2}) = C_1\bar{y}_1(\frac{l}{2}) + C_2\bar{y}_2(\frac{l}{2}) + \left(\frac{e^{\nu_1 x}}{\nu_1 - \nu_2}\int e^{-\nu_1 x} S_N(x)dx + \frac{e^{\nu_2 x}}{\nu_2 - \nu_1}\int e^{-\nu_2 x} S_N(x)dx\right)\Bigg|_{x=l/2};$$

13). Все вычисления и графические построения могут быть произведены на РЭВМ с использованием каких – либо вычислительных систем, например, системы MATHCAD.

Пример:

Для краевой задачи

$$y'' = q(x); \quad y(0) = 0; \quad y'(l) = y_l';$$

функция $q(x)$ задана на полупериоде - интервале $x \in [0,3]$, $l = 3$ кусочно – непрерывно

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x) = \dfrac{2}{3}x & при \quad 0 \le x < l/2 \\ q_2(x) = 0 & при \quad l/2 \le x \le l \end{cases}$$

при $l = 3, \quad \pi = 3.14159, \quad N = 20, \quad x \in [-3l = -9, 3l = 9]; \quad n = 0,1,...,20; \quad S_{20}(x)$.

Выражения для коэффициентов Фурье – Эйлера имеют вид

$$b_n = \frac{4}{3l}\left(-\frac{xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l} + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^{l/2} = \frac{l}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{1}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right);$$

значения тригонометрических функций для указанных аргументов такие

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & при \quad n = 2k, k = 0,1,2,... \\ 1 & при \quad n = 4k+1, \\ -1 & при \quad n = 4k+3, \end{cases} \qquad \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & при \quad n = 2k+1, k = 0,1,2,... \\ 1 & при \quad 4k+4, \\ -1 & при \quad 4k+2 \end{cases}$$

Выражения коэффициентов Фурье – Эйлера

$$b_n = \begin{cases} 2l/n^2\pi^2 & при \quad n = 4k+1 \\ l/n\pi & при \quad n = 4k+2 \\ -2l/n^2\pi^2 & при \quad n = 4k+3 \\ -2l/n\pi & при \quad n = 4k+4 \end{cases}$$

и представление правой части есть

$$q(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \Leftrightarrow S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

и соответственно интеграл – искомая функция

$$y(x) = C_1 x + C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l}; \Leftrightarrow y_N(x) = C_1 x + C_2 + \sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l};$$

Удовлетворяя краевым условиям, получаем постоянные интегрирования

$$C_2 = 0; \quad C_1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{l}{n\pi}(-1)^n = 0;$$

и окончательно искомую функцию

$$y(x) = C_1 x - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l}; \Rightarrow \quad y_N(x) = C_z x - \sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{l};$$

значение которой в середине полупериода равно

$$y(l/2) = C_1 \frac{l}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} b_b \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 d_n; \Rightarrow \quad y_N(x) = C_1 \frac{l}{2} - \sum_{n=1}^{N} b_b \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 d_n; \quad d_n = \begin{cases} 1 & при \quad n = 4k+1, k = 1,2,.. \\ 0 & при \quad n = 2k \\ -1 & при \quad n = 4k+3 \end{cases}$$

В системе **MATHCAD** реализация задания этого примера выглядит так, как приведено в **приложении** №2.

Задача № 3. Разложить функцию $y = f(x)$ на отрезке $0 \le x \le l$ в **обобщенный ряд Фурье** по системе **ортогональных (ортонормированных)** на этом отрезке **функций**

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \widetilde{g}_n(x); \quad c_n = \frac{1}{\|g_n\|} \int_0^l f(x) g_n(x) dx; \quad (\widetilde{g}_n \cdot \widetilde{g}_m)\Big|_0^l = \int_0^l \widetilde{g}_n(x) \widetilde{g}_m(x) dx = \begin{cases} 1 & при \quad n = m \\ 0 & при \quad n \neq m \end{cases}$$

$$g_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \quad или \quad g_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}; \quad \|g_n\| = (\int_0^l g_n^2(x) dx)^{1/2} = \sqrt{\frac{l}{2}}; \quad \widetilde{g}_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n\|};$$

Порядок выполнения:

1). Представить на заданном интервале искомую функцию в виде **обобщенного ряда Фурье** по **системе ортогональных (ортонормированных)** на этом интервале **функций**

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \widetilde{g}_n(x); \qquad c_n = \int_0^l f(x) \widetilde{g}_n(x) dx;$$

с коэффициентами обобщенного ряда Фурье c_n. Вычислить значения коэффициентов обобщенного ряда Фурье для $n = 8$.

2). Записать выражение **обобщенного ряда** Фурье и **частичную сумму**

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \widetilde{g}_n(x); \qquad S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \widetilde{g}_n(x);$$

3). Построить **график** заданной **функции** и **частичной суммы** на заданном интервале.

4). Установит характер **зависимости абсолютной величины** коэффициентов Фурье от **номера** разложения n.

Пример:

Задана на интервале $x \in [0,2]$ функция $f(x) = \frac{x}{2}$; разложить на указанном интервале по ортогональной системе на этом интервале функций $g_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2}$.

Убеждаемся в свойстве **ортогональности** системы функций $g_n(x)$

$$(g_n \cdot g_m) = \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{l}{(n-m)\pi} \sin\frac{(n-m)\pi x}{l} l - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^l =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l}{(n-n)\pi} \sin(n-m)\pi = \begin{cases} \frac{l}{2} & при \quad n = m \\ 0 & при \quad n \neq m \end{cases}; \quad \rightarrow \quad \|g_n\| = \sqrt{\frac{l}{2}};$$

Построим **ортонормированную** фундаментальную систему функций, для чего исходную систему ортогональных функций нормируем так

$$\widetilde{g}_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n\|}; \qquad \widetilde{g}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}; \quad l = 2, \Rightarrow \widetilde{g}_n(x) = \sin\frac{n\pi}{2};$$

Вычислим **коэффициенты** обобщенного ряда Фурье

$$c_n = \int_0^l f(x) \widetilde{g}_n(x) dx; \quad c_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin\frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2}\{-\frac{2x}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{2} + (\frac{2}{n\pi})^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2\} = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n;$$

Запишем **обобщенный ряд** Фурье – Эйлера для заданной функции

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \widetilde{g}_n(x); \quad \frac{x}{2} \sim S(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi x}{2};$$

и **частичную сумму обобщенного ряда** Фурье – Эйлера

$$f(x) \Rightarrow S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \widetilde{g}_n(x); \quad \frac{x}{2} \sim S_N(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2};$$

Построим **график** заданной **функции** и соответствующей ей **частичной суммы** обобщенного ряда Фурье – Эйлера (для числа слагаемых $n = 20$) и **зависимости коэффициентов** обобщенного ряда **от номера** разложения (см. **Приложение** № 3, выполненного в системе **MATHCAD**).

Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный технический университет «МАМИ»

Кафедра «Прикладная и вычислительная математика»

Расчетно –графическая работа по разделу

«Элементы функционального анализа, обобщенные ряды Фурье и тригонометрические ряды Фурье - Эйлера».

Вариант № ____

Факультет ______________________

Группа ______________________

Студент (Ф.И.О.) ______________________

Лектор (Ф.И.О. должн.) ______________________

Преподаватель (Ф.И.О. должн.) ______________________

Москва 2006 год

ПРОГРАММА

Лекций по разделу
«ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА, РЯДЫ И ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ-ЭЙЛЕРА»
курса
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.
(IV семестр, II курс, поток АЭ 8-13,2006г)

Лекция 1. Основные понятия и определения.

1.Последовательности числовые и функциональные: ограниченная сверху (или снизу), ограниченная; бесконечно малая (большая); монотонная; сходящаяся; предел последовательности; предельная функция, Равномерная сходимость.
1.2. Ряды числовые и функциональные. Сходимости: равномерная, в среднем, в среднеквадратичном на заданном интервале. Ряд, частичная сумма ряда; сумма ряда; остаток ряда; равномерно сходящийся функциональный ряд.
1.2.1. Свойства сходящихся рядов: перестановки мест слагаемых; сочетания элементов; распределительное свойство; сумма ряда; интеграл от суммы; производная от суммы.
1.2.2. Признаки сходимости рядов: сравнения, мажорирования, оценки остаточных сумм.
1.2.3. Критерии сходимости функциональных рядов: в среднем, в среднеквадратичном.
1.3. Функциональные ряды. Фундаментальная система функций. Коэффициенты разложения.
1.3.1. Степенные ряды.
1.3.2 Обобщенные ряды Фурье; ортогональная фундаментальна система функций, ортонормированная фундаментальная система функций.
2. Тригонометрические ряды Фурье - Эйлера.
2.1. Ряд Фурье - Эйлера на основном интервале ($-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$).
2.2. Ряд Фурье-Эйлера на основном интервале ($-l \le x \le l, 2T = 2l$).
2.3. Ряд Фурье-Эйлера на основном интервале ($a \le x \le b, 2T = 2l = (b-a)$).

Лекция 2. Ряды Фурье-Эйлера для четных и нечетных функций на основных интервалах. Сходимость рядов Фурье-Эйлера. Приложение рядов Фурье-Эйлера.

2.1. Четные функции. Ряды Фурье-Эйлера для четных функций.
2.1.1. Ряд Фурье-Эйлера четных на основном интервале ($-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$).
2.1.2. Ряд Фурье-Эйлера четной на основном интервале ($-l \le x \le l, 2T = 2l$).
2.2. Нечетные функции. Ряды Фурье-Эйлера для нечетных функций.
2.2.1. Ряд Фурье-Эйлера нечетных на основном интервале ($-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$).
2.2.2. Ряд Фурье-Эйлера нечетной на основном интервале ($-l \le x \le l, 2T = 2l$).
2.3. Теоремы об условиях сходимости рядов Фурье-Эйлера.
2.3.1. Теорема
2.3.2. Теорема Дирихле
2.4. Теоремы об условиях дифференцируемости рядов Фурье-Эйлера.
1.5. Частичная сумма ряда Фурье-Эйлера, невязка (расхождение, уклонение). Неравенства Бесселя и равенство Парсеваля –Ляпунова.
2.5.1. Частичная сумма рядов Фурье-Эйлера
2.5.2. Характер зависимости коэффициентов Фурье-Эйлера от номера.
2.5.3. Неравенство Бесселя.
2.5.4. Равенство Ляпунова.
2.5.6. Полнота фундаментальной системы функций в смысле средне квадратичного.
2.5.7. Эффект Гиббса (неустранимая погрешность в окрестности точек разрыва).
2.6. Приложение рядов Фурье-Эйлера.
2.6.1. Приближение (аппроксимация) функций (гармонический анализ).
2.6.2. Применение рядов Фурье-Эйлера при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с неоднородной правой частью – кусочно - непрерывной функцией.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1). Последовательности числовые и функциональные: сходящаяся; предел последовательности; предельная функция, равномерная сходимость.

2). Ряды числовые и функциональные. Сходимости: равномерная, в среднем, в среднеквадратичном.

3). Функциональные ряды: фундаментальная система функций, коэффициенты разложения.

4). Степенные ряды Тейлора – Маклорена.

5). Обобщенные ряды Фурье; ортогональная и ортонормированная фундаментальна система функций; коэффициенты обобщенного ряда Фурье..

6). Тригонометрические ряды Фурье – Эйлера; ортогональная и ортонормированная фундаментальна система функций на отрезке $-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$; коэффициенты ряда.

7). Тригонометрические ряды Фурье – Эйлера; ортогональная и ортонормированная фундаментальна система функций на отрезке $-l \le x \le l, 2T = 2l$; коэффициенты ряда.

8). Тригонометрические ряды Фурье – Эйлера; ортогональная и ортонормированная фундаментальна система функций на отрезке $a \le x \le b, 2T = 2l = (b-a)$; коэффициенты ряда.

9). Тригонометрический ряд Фурье-Эйлера для четных на основном интервале ($-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$).

ряда.

10). Тригонометрический ряд Фурье-Эйлера для четной на основном интервале ($-l \le x \le l, 2T = 2l$).

11). Тригонометрический ряд Фурье-Эйлера для Ряд Фурье-Эйлера нечетных на основном интервале ($-\pi \le x \le \pi, 2T = 2l = 2\pi$).

12). Тригонометрический ряд Фурье-Эйлера для нечетной на основном интервале ($-l \le x \le l, 2T = 2l$).

13). Теоремы Дирихле о сходимости рядов Фурье-Эйлера.

14). Дифференцируемость рядов Фурье-Эйлера.

15). Неравенства Бесселя и равенство Парсеваля –Ляпунова.

16). Характер зависимости коэффициентов Фурье-Эйлера от номера разложения.

17). Полнота фундаментальной системы функций.

18). Эффект Гиббса.

19). Приложение рядов Фурье-Эйлера: приближение (аппроксимация) функций (гармонический анализ).
20). Применение рядов Фурье-Эйлера при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с неоднородной правой частью – кусочно - непрерывной функцией.