

Пример решения

Задача. Груз массой $m = 2$ кг расположен на гладкой горизонтальной плоскости и скреплен с пружинами, жесткостью $c_1 = 4$ Н/м, $c_2 = 6$ Н/м, $c_3 = 3,6$ Н/м, $c_4 = 12$ Н/м (рис. 164). Определить частоту собственных колебаний груза. Массой пружин пренебречь.

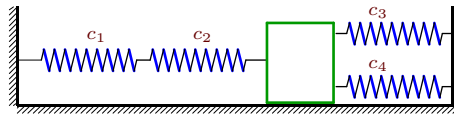


Рис. 164

Решение

Груз, совершающий прямолинейное поступательное движение, примем за материальную точку. Введем систему координат с началом в положении равновесия груза (рис. 164) и рассмотрим силы, действующие на него при движении.

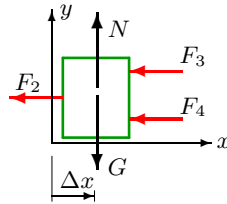


Рис. 165

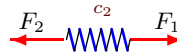


Рис. 166

Смещение груза обозначим Δx . Со стороны пружин возникают силы, которые обозначим по номерам соответствующих пружин: F_2 , F_3 , F_4 . Величины сил F_4 , F_3 пропорциональны удлинениям пружин

$$F_3 = c_4 \Delta x, \quad F_3 = c_3 \Delta x. \quad (13.1)$$

Запишем аналогичные соотношения для последовательно соединенных пружин 1 и 2

$$F_1 = c_1 \Delta x_1, \quad F_2 = c_2 \Delta x_2, \quad \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2. \quad (13.2)$$

Если масса пружины 2 равна нулю, то уравнение ее движения под действием сил F_1 и F_2 вырождается в равенство сил $F_1 = F_2$. С учетом этого из (13.2) следует

$$F_2 = c_1 c_2 / (c_1 + c_2) \Delta x. \quad (13.3)$$

Подставим это выражение и выражения (13.1) в уравнение движения груза в проекции на ось x

$$m\ddot{x} = -F_2 + F_3 + F_4. \quad (13.4)$$

Получим

$$m\ddot{x} = -(c_1c_2/(c_1 + c_2) + c_3 + c_4)\Delta x. \quad (13.5)$$

Учитывая, что начало координат совпадает с положением равновесия груза, имеем $\Delta x = x$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad (13.6)$$

где

$$c = (c_1c_2/(c_1 + c_2) + c_3 + c_4) = 18 \text{ Н/м}.$$

Частота ¹ собственных колебаний равна

$$k = \sqrt{c/m} = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Интегрированием (13.6) можно получить уравнение гармонических колебаний

$$x = A \sin(kt + \beta),$$

где A — амплитуда колебаний, β — начальная фаза определяются по начальным условиям. Период свободных колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi/k.$$

¹Или циклическая частота.