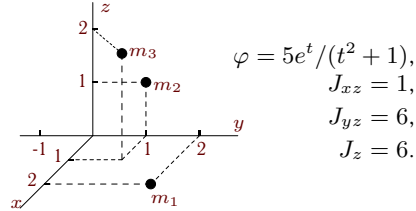
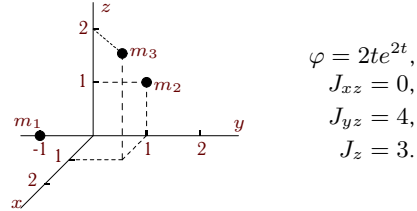


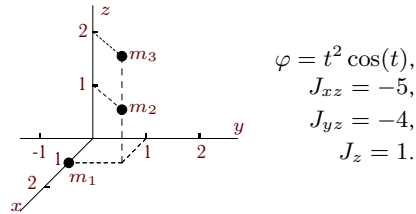
Д2. 27.



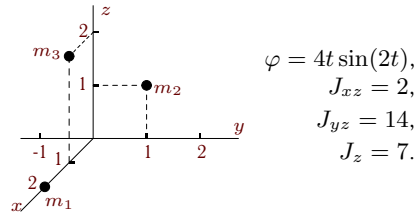
Д2. 28.



Д2. 29.



Д2. 30.



Пример решения

Задача. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi = e^{2t} \sin(t)$. Даны моменты инерции тела $J_{xz} = 7 \text{ кгм}^2$, $J_{yz} = 8 \text{ кгм}^2$, $J_z = 2 \text{ кгм}^2$ и координаты (в метрах) трех точек с массами $m_1 = 1 \text{ кг}$, $m_2 = 2 \text{ кг}$ и $m_3 = 3 \text{ кг}$, расположенных на теле (рис. 148). Найти момент равнодействующей сил, приложенных к телу относительно начала координат при $t = 0$.

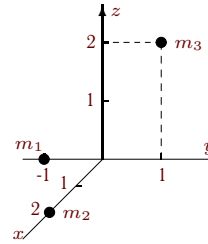


Рис. 148

Решение

Дифференциальные уравнения вращения тела вокруг оси z в проекциях на оси координат имеют вид

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (3.3)$$

где $L_x = -\omega_z J_{xz}^{(s)}$, $L_y = -\omega_z J_{yz}^{(s)}$, $L_z = \omega_z J_z^{(s)}$ — проекции кинетического момента¹ тела $\vec{L}_0$. Центробежные моменты системы $J_{xz}^{(s)}$, $J_{yz}^{(s)}$, и осевой момент инерции $J_z^{(s)}$ складываются из соответствующих

¹Эту величину называют также моментом количества движения тела и обозначают $\vec{K}_0$ [4, 13, 19] или $\vec{G}$ [3].

моментов инерции тела и точек:

$$\begin{aligned} J_{xz}^{(s)} &= J_{xz} + \sum_{k=1}^3 m_k x_k z_k, \\ J_{yz}^{(s)} &= J_{yz} + \sum_{k=1}^3 m_k y_k z_k, \\ J_z^{(s)} &= J_z + \sum_{k=1}^3 m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь x_k, y_k, z_k — координаты точки массой m_k . С учетом данных задачи получаем

$$\begin{aligned} J_{xz}^{(s)} &= 7, \\ J_{yz}^{(s)} &= 8 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 14, \\ J_z^{(s)} &= 2 + 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 = 14. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из (3.3) следует

$$M_x = -J_{xz}^{(s)} \ddot{\varphi}, \quad M_y = -J_{yz}^{(s)} \ddot{\varphi}, \quad M_z = J_z^{(s)} \ddot{\varphi}. \quad (3.6)$$

Дифференцируя по времени заданную зависимость $\varphi(t)$, найдем угловое ускорение тела

$$\omega_z = \dot{\varphi} = e^{2t}(2 \sin(t) + \cos(t)), \quad \ddot{\varphi} = \dot{\omega}_z = e^{2t}(3 \sin(t) + 4 \cos(t)).$$

При $t = 0$ получим $\ddot{\varphi} = 4 \text{ с}^{-1}$. Таким образом из (3.5) и (3.6) следует

$$M_x = -28 \text{ Нм}, \quad M_y = -56 \text{ Нм}, \quad M_z = 56 \text{ Нм}.$$

Вычислим модуль момента равнодействующей сил, приложенных к телу относительно начала координат

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 84 \text{ Нм}.$$

Д3. Уравнение Лагранжа 2-го рода

Механическая система из двух однородных цилиндров 1 и 2 и бруска 3 с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и движется под действием силы F . Трением пренебречь. Массы даны в килограммах, сила — в ньютонах. Найти ускорение бруска, скользящего по гладкой поверхности.

Условия задач