искомой силы и реакцию опоры через коэффициент трения качения:

$$F = \frac{\delta\,(a+b)\,(cP-M)}{b\,(Rc+\delta\,(a+b))}, \quad N = \frac{cP-M}{Rc+\delta\,(a+b)}. \tag{1.49}$$

Подставляем заданные значения, $P = 20$ Н, $M = 3$ Нм, $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 5$ м, $R = 1$ м, $\delta = 0{,}02$ м, и вычисляем $F = 0{,}575$ Н, $N = 19{,}169$ Н.

Для того чтобы проверить возможность качения цилиндра в противоположную сторону, т.е. направо, необходимо направить $M_{\text{тр}}$ против часовой стрелки, составить систему уравнений равновесия и решить ее относительно M. Рассуждая как предыдущей задаче на с. 28, заметим, что эта система будет отличаться от уже решенной только знаком перед коэффициентом трения качения δ, следовательно, ее решение получается из предыдущего формальной заменой знака δ. Подставляем в (1.49) $\delta = -0{,}02$ и вычисляем $F = -0{,}589$ Н, $N = 19{,}636$ Н. В итоге получаем область изменения силы F в условии равновесия системы: $-0{,}589 < F < 0{,}575$ Н. В этой задаче имеется односторонняя связь — опирание цилиндра на плоскость. Если $N > 0$ связь реализуется, при $N < 0$ происходит отрыв цилиндра и нарушение равновесия. Очевидно, здесь $N > 0$ и отрыва не происходит. Однако помимо возможности качения и отрыва цилиндра от плоскости есть еще одно состояние предельного равновесия, которое здесь не изучается. Это возможность проскальзывания цилиндра. Проскальзывание будет происходить при достижении силой сцепления $F_{\text{сц}}$ своего предельного значения, определяемого формулой Кулона [1]: $F_{\text{сц}} = F_{\text{тр}} = Nf$, где f — коэффициент трения, зависящий от свойств контактирующих материалов, N — реакция опоры. По условию задачи полагается, что коэффициент трения достаточно большой.

1.3. Ферма

Задача 11. Плоская статически определимая ферма опирается на подвижный шарнир A и неподвижный B (рис. 46). В узле C ферма нагружена горизонтальной силой $F = 10$ кН. Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях фермы.

Решение

Определяем реакции опор фермы. Отбрасываем связи (опорные шарниры) и заменяем их действие реакциями X_B, Y_A, Y_B (рис. 47). Систему координат выбираем с началом в точке A.

[1] *Charles-Augustin de Coulomb* (1736–1806) — французский физик, открыл закон сухого трения, один из основателей электростатики.

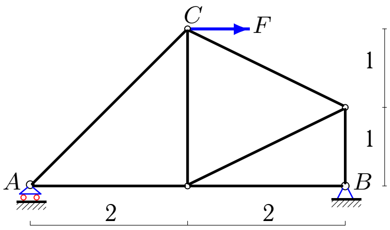

Рис. 46

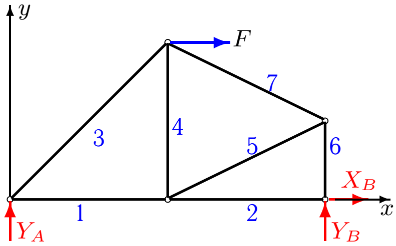

Рис. 47

Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = X_B + F = 0,$$
$$\sum M_A = Y_B \cdot 8 - F \cdot 4 = 0,$$
$$\sum M_B = -Y_A \cdot 8 - F \cdot 4 = 0.$$

Решаем систему уравнений. Находим реакции опор: $X_B = -F = -10$ кН, $Y_A = -F/2 = -5$ кН, $Y_B = F/2 = 5$ кН. Для проверки вертикальных реакций составляем сумму проекций на ось y всех сил, действующих на ферму: $\sum Y_i = Y_A + Y_B = 5 - 5 = 0$. Уравнение удовлетворяется тождественно. Реакции Y_A и Y_B найдены верно [1].

Определяем усилия S_i в стержнях фермы. Нумеруем стержни фермы (рис. 47).

Усилия S_1, S_3 найдем из условия равновесия узла A (рис. 48), а усилия S_2, S_6 — из условия равновесия узла B (рис. 49)

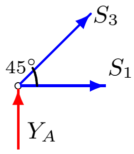

Рис. 48

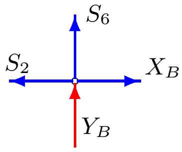

Рис. 49

Реакции рассеченных стержней направляем из узла. Это правило соответствует принятому соглашению, согласно которому в растянутых

[1] Более надежная проверка, контролирующая также и реакцию X_B, состоит в проверке выполнения уравнения моментов относительно какой-либо точки, не обязательно совпадающей с узлом и не лежащей на линиях действия проверяемых реакций. В данной задаче это может быть центр средней стойки фермы.

стержнях положительные усилия, а отрицательные — в сжатых. Записываем уравнения равновесия узла A

$$\sum X_i = S_1 + S_3 \cos 45^\circ = 0,$$
$$\sum Y_i = S_3 \sin 60^\circ 45 + Y_A = 0.$$

Решаем систему уравнений и находим $S_1 = -5$ кН, $S_3 = 7{,}07$ кН. Уравнения равновесия узла B:

$$\sum X_i = -S_2 + X_B = 0,$$
$$\sum Y_i = S_3 + Y_B = 0.$$

Отсюда получаем усилия $S_2 = X_B = -10$ кН, $S_6 = -Y_B = -5$ кН.

Для определения усилий S_5, S_7 используем метод Риттера. [25]. Сечение Риттера [1] должно пересекать три (не больше и не меньше) стержня фермы и делить ее на две части. Отсекаемая часть должна содержать по крайней мере один стержень. Произведем сечение I-I (рис. 50). Отбрасываем левую часть фермы (рис. 51). Рассматриваем

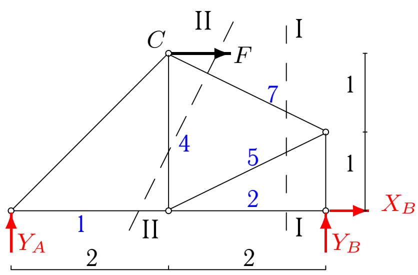

Рис. 50

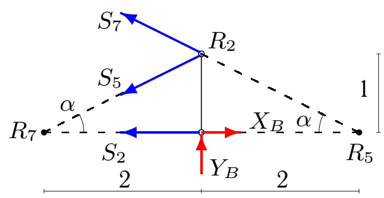

Рис. 51

равновесие оставшейся правой части, состоящей из одного вертикального стержня. Усилия в рассеченных стержнях направляем вдоль стержней в сторону сечения. Находим моментные точки R_5, R_7 на пересечениях линий действия усилий в сечении. Составляем уравнения моментов относительно этих точек:

$$\begin{aligned} &\sum M_{R_7} = S_7 \cdot 2 \sin\alpha + S_7 \cdot 1 \cos\alpha + Y_B \cdot 2 = 0,\\ &\sum M_{R_5} = S_5 \cdot 2 \sin\alpha + S_5 \cdot 1 \cos\alpha - Y_B \cdot 2 = 0. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Здесь $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$. Решая уравнения, получаем $S_7 = -5{,}59$ кН, $S_5 = 5{,}59$ кН.

[1] *August Ritter* (1826–1906) — немецкий механик.

Для определения усилия S_4 произведем сечение II-II по стержням 1, 4, 7 (рис. 52). Рассматриваем равновесие правой части фермы (стержневой треугольник). Разрезанные стержни заменяем усилиями, направленными по стержням в сторону сечения. То, что векторы с одним и тем же усилием для различных схем оказываются направленными в разные стороны, не является ошибкой. Напротив, это соответствует аксиоме статики о действии и противодействии. Так, вектор с усилием S_1 на рис. 48 направлен направо, а на рис. 52 — налево. Точка Риттера R_4 для определения усилия S_4 находится на пересечении линий действия усилий S_9 и S_1 и совпадает с точкой R_5 (рис. 51).

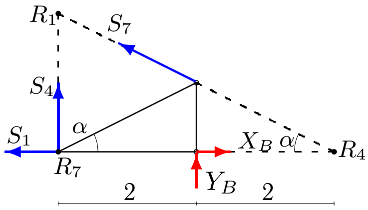

Рис. 52

Составляем уравнение моментов $\sum M_{R_4} = -S_4 \cdot 4 - Y_B \cdot 2 = 0$. Получаем $S_4 = -2{,}5$ кН. Для проверки решения можно найти усилие S_1, составив уравнение моментов относительно точки R_1. Ранее это усилие было найдено из уравнения проекции при рассмотрении равновесия узла A. Таким образом, усилия во всех стержнях фермы найдены. Стержни с положительными усилиями (3,5) растянуты, с отрицательными (1, 2, 4, 6, 7) — сжаты.

Маплет для расчета фермы дан на с. 342.

Задача 12. (Диаграмма Максвелла–Кремоны [1]). Дана ферма (рис. 53), на которую действуют нагрузки $P = 10$ кН, $Q = 10$ кН. Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях.

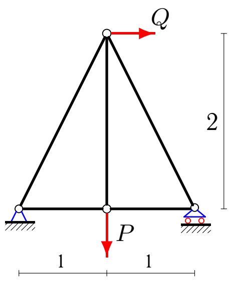

Рис. 53

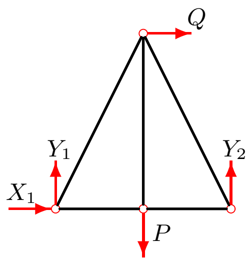

Рис. 54

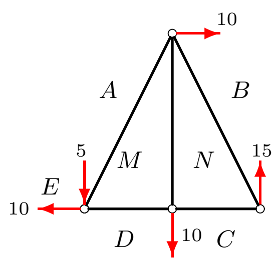

Рис. 55

[1] *James Clerk Maxwell* (1831–1879) — шотландский физик, математик, астроном. *Antonio Cremona* (1830–1903) — итальянский математик.