К16.9.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{e} = (2,1,2)$, $A(-1,7,5)$.

К16.10.
$\alpha = \pi$, $\vec{e} = (8,4,1)$, $A(-5,-4,2)$.

К16.11.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{e} = (1,4,8)$, $A(-1,4,-3)$.

К16.12.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{e} = (-2,1,-2)$, $A(-4,1,3)$.

К16.13.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{e} = (1,2,-2)$, $A(7,5,1)$.

К16.14.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{e} = (1,-2,2)$, $A(9,9,15)$.

К16.15.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{e} = (2,1,2)$, $A(1,5,1)$.

К16.16.
$\alpha = \pi$, $\vec{e} = (8,4,1)$, $A(-4,-1,0)$.

К16.17.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{e} = (1,4,8)$, $A(4,0,-5)$.

К16.18.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{e} = (-2,1,-2)$, $A(8,6,10)$.

К16.19.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{e} = (1,2,-2)$, $A(11,12,4)$.

К16.20.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{e} = (1,-2,2)$, $A(12,6,6)$.

К16.21.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{e} = (2,1,2)$, $A(-4,1,8)$.

К16.22.
$\alpha = \pi$, $\vec{e} = (8,4,1)$, $A(-8,-3,4)$.

К16.23.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{e} = (1,4,8)$, $A(-5,-4,-3)$.

К16.24.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{e} = (-2,1,-2)$, $A(-7,1,0)$.

К16.25.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{e} = (1,2,-2)$, $A(2,12,4)$.

К16.26.
$\alpha = \pi/2$, $\vec{e} = (1,-2,2)$, $A(6,14,2)$.

К16.27.
$\alpha = -\pi/2$, $\vec{e} = (2,1,2)$, $A(-1,2,9)$.

К16.28.
$\alpha = \pi$, $\vec{e} = (8,4,1)$, $A(-7,-4,0)$.

К16.29.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}6$, $\cos(\alpha/2) = 0{,}8$,
$\vec{e} = (1,4,8)$, $A(-2,-3,4)$.

К16.30.
$\sin(\alpha/2) = 0{,}8$, $\cos(\alpha/2) = -0{,}6$,
$\vec{e} = (-2,1,-2)$, $A(-4,-3,-5)$.

Пример решения

Задача. Твердое тел, закрепленное шарнирно в начале координат, поворачивается на угол $\alpha = -\pi/2$ вокруг оси, определенной вектором $\vec{e} = (1,0,0)$. Найти смещение точки $A(0,17,31)$ (рис. 144).

Решение

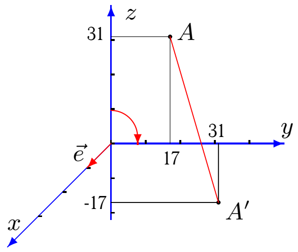

Рис. 144

Способ 1. Преобразование вращения тела вокруг оси с направляющим вектором $\vec{e}$ на угол α определяется следующей формулой [4]

$$\vec{X}\,' = \vec{X} + 2\,q_0\vec{b} + 2\,\vec{a}\times\vec{b},$$

где $\vec{a} = \vec{e}\sin(\alpha/2)$, $\vec{b} = \vec{a}\times\vec{X}$, $q_0 = \cos(\alpha/2)$, $\vec{X}$ — исходный радиус-вектор точки A, $\vec{X}\,'$ — радиус-вектор точки A' после поворота. Вектор перемещения имеет вид $\Delta\vec{X} = \vec{X}\,' - \vec{X}$.

Вычислим все необходимые величины

$$q_0 = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 31 \end{pmatrix},\quad \vec{a} = -\sqrt{2}/2\,\vec{e} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2q_0\vec{b} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 31 \\ -17 \end{pmatrix},$$

$$2\,\vec{a}\times\vec{b} = 2\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 31\sqrt{2}/2 & -17\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -31 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем вектор перемещения

$$\Delta\vec{X} = \vec{X}\,' - \vec{X} = 2\,q_0\vec{b} + 2\,\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 31 \\ -17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ -31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -48 \end{pmatrix}.$$

Модуль перемещения AA' равен (рис. 144)

$$|\Delta\vec{X}| = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50.$$

Способ 2. Найдем параметры Эйлера, соответствующие заданному повороту тела [4]. Один параметр уже найден, это $q_0 = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$, другие являются координатами вектора $\vec{a}$ в разложении по неподвижным осям [1], т.е.

$$q_1 = a_x = -\sqrt{2}/2,\quad q_2 = a_y = 0,\quad q_3 = a_z = 0.$$

[1] Легко проверить свойство параметров Эйлера: $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$.

Компоненты оператора поворота R имеют вид

$$\begin{aligned} r_{11} &= 2(q_0^2+q_1^2)-1,\ \ r_{12}=2(q_1q_2-q_0q_3),\ \ r_{13}=2(q_1q_3+q_0q_2),\\ r_{12} &= 2(q_1q_2+q_0q_3),\ \ r_{22}=2(q_0^2+q_2^2)-1,\ \ r_{23}=2(q_2q_3-q_0q_1),\\ r_{13} &= 2(q_1q_3-q_0q_2),\ \ r_{32}=2(q_2q_3+q_0q_1),\ \ r_{11}=2(q_0^2+q_3^2)-1. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор поворота в данной задаче имеет вид

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Воздействуем оператором R на исходный вектор $\vec{X}$

$$\vec{X}\,'=R\vec{X}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 17\\ 31 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 31\\ -17 \end{pmatrix}.$$

Оба способа дают одинаковый результат.

К17. Кинематические инварианты

В некоторый момент времени известны скорости трех точек тела, движущегося в пространстве. Заданы координаты этих точек. Найти кинематические инварианты движения.

Условия задач

К17. 1.
$A=(1,0,1)$, $B=(2,0,1)$,
$C=(2,0,0)$,
$\vec{v}_A=(1,-1,-4)$,
$\vec{v}_B=(1,-3,-2)$,
$\vec{v}_C=(3,-4,-2)$.

К17. 2.
$A=(0,0,1)$, $B=(1,-1,-1)$,
$C=(1,0,0)$,
$\vec{v}_A=(-2,1,1)$,
$\vec{v}_B=(-2,-9,6)$,
$\vec{v}_C=(2,-8,5)$.

К17. 3.
$A=(0,2,0)$, $B=(1,-1,1)$,
$C=(-1,0,1)$,
$\vec{v}_A=(-3,1,-1)$,
$\vec{v}_B=(12,9,8)$,
$\vec{v}_C=(6,-3,0)$.

К17. 4.
$A=(1,2,2)$, $B=(2,0,0)$,
$C=(-1,0,0)$,
$\vec{v}_A=(4,-1,-3)$,
$\vec{v}_B=(20,-1,5)$,
$\vec{v}_C=(20,-13,-7)$.