

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ К8

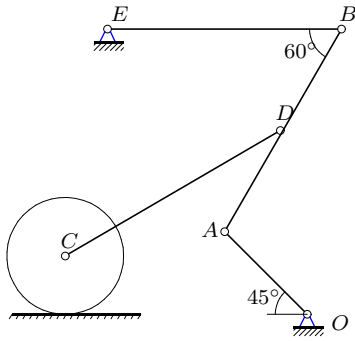


Рис. 1

$$\begin{aligned}\omega_{OA} &= 2 \text{ рад/с}, \\ OA &= 20 \text{ см}, \\ AB &= 40 \text{ см}, \\ AD &= DB, \\ BE &= 40 \text{ см}, \\ R &= 10 \text{ см}, \\ CD &= 43 \text{ см}.\end{aligned}$$

Построить кривую изменения скорости и ускорения точки C за время полного оборота кривошипа. Найти скорость и ускорение точек A, B, C, D в указанном положении механизма.

Решение.

Задачу решим в математическом пакете **Maple**.

Координаты точек механизма являются функциями времени. Эти функции вычислим вручную. Определение же скоростей и ускорений как производных координат по времени предоставим мощному аппарату символьных преобразований **MAPLE**.

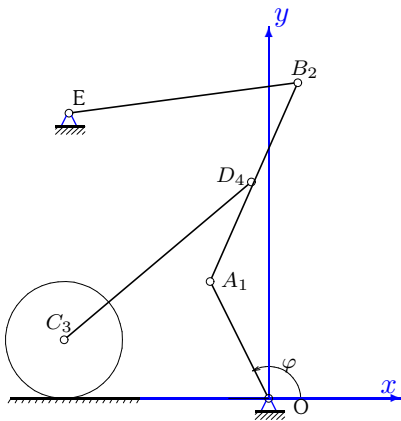


Рис. 2

Координаты точки A (рис.2)

$$x_A = OA \cos \varphi, \quad y_A = OA \sin \varphi$$

являются функциями времени. Действительно, для равномерного вращения $\omega = \text{const}$. Интегрируя зависимость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

при начальном условии $\varphi = 3\pi/4$, получим

$$\varphi = \varphi(t) = \omega \cdot t + 3\pi/4.$$

Вращение происходит против часовой стрелки.

Координаты шарнира B определим, пользуясь алгоритмом нахождения точек пересечения двух окружностей из Приложения на с. 3. Точки A, B и E в нашей задаче соответствуют точкам K, N и M . Кроме того, $l_1 = BE$, $l_2 = AB$. В расчетах берем знак $+$. Вспомогательная длина l_0 соответствует расстоянию AE

$$l_0 = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}.$$

Изобразим механизм в некотором произвольном положении. Введем систему координат x, y . Начало координат поместим в точку O (рис.2). Пронумеруем подвижные точки. Определим координаты неподвижного шарнира E (рис.1)

$$\begin{aligned}x_E &= -OA \cos 45 + AB \cos 60 - BE, \\ y_E &= OA \cos 45 + AB \cos 30.\end{aligned}$$

Вычислим еще четыре вспомогательные величины

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= (y_A - y_E)/l_0, & \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \\ \cos \beta &= (BE^2 + l_0^2 - AB^2)/(2BE l_0), & \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Получим координаты промежуточного шарнира B

$$x_B = x_E + BE \cos(\alpha + \beta), \quad y_B = y_E + BE \sin(\alpha + \beta).$$

Так как точка D находится на середине звена AB , то

$$x_D = (x_A + x_B)/2, \quad y_D = (y_A + y_B)/2.$$

Координата оси цилиндра известна по условию $y_C = R$. По теореме Пифагора вычислим

$$x_C = x_D - \sqrt{CD^2 - (y_D - y_C)^2}.$$

Затем остается внести полученные функции в программу **Maple**, продифференцировать их (diff) и построить нужные графики (plot) [5].

Определение координат среднего шарнира двухзвенника

Координаты опорных шарниров четырехзвенного механизма обычно заданы. Координаты конца звена, вращающегося с заданной угловой скоростью и расположенного под определенным углом, например, "3" вычисляются просто: $x_3 = x_4 + l_3 \cos \varphi_3$, $y_3 = y_4 + l_3 \sin \varphi_3$. Наибольшую трудность вызывает аналитическое определение координат шарнира "2". Предложим два алгоритма для решения этой геометрической задачи.

Алгоритм 1

Исходные данные: $x_1 = x_M$, $y_1 = y_M$, $x_3 = x_K$, $y_3 = y_K$, l_1 , l_2 .

Найти: x_N , y_N .

Решение

1. $l_0 = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2}$.
2. $\sin \alpha = (y_K - y_M)/l_0$, $\cos \alpha = (x_K - x_M)/l_0$,
3. $\cos \beta = (l_1^2 + l_0^2 - l_2^2)/(2l_1 l_0)$, $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$.
4. $x_N = x_M + l_1 \cos(\alpha \pm \beta)$, $y_N = y_M + l_1 \sin(\alpha \pm \beta)$.

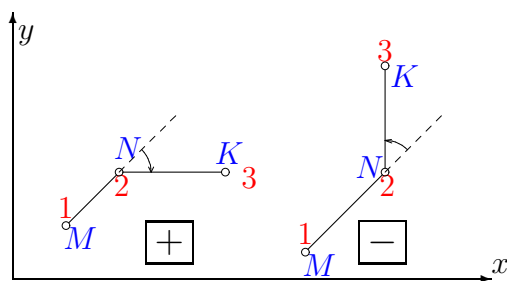


Рис.4

Задача имеет два решения (две точки пересечения окружностей радиусов l_1 и l_2 с центрами в точках "М" и "К"). Знак "+" в формулах следует брать, если при движении от точки "М" к "К" стержень 2 поворачивается от стержня 1 по часовой стрелке. Знак "-" берется в противном случае (рис.4).

Во избежание ошибок не рекомендуется вычислять углы α и β . Лучше использовать тригонометрические формулы

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

Алгоритм 2

Решаем систему уравнений

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_1^2,$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = l_2^2$$

и находим координаты x_2 , y_2 . Из двух решений следует выбрать то, которое удовлетворяет условию задачи. Решение удобно искать в системе Maple (оператор solve).

Литература

- [1] *Кирсанов М. Н.* Решебник. Теоретическая механика / Под ред. А. И. Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [2] *Кирсанов М. Н.* Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [3] *Кирсанов М. Н.* Графы в Maple. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- [4] *Кирсанов М. Н.* Сборник экзаменационных задач по динамике. — М.: МЭИ, 2005.
- [5] *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011.