

ВЯЗКОУПРУГОСТЬ И СТАБИЛЬНОСТЬ

10.1. Условие стабильности процесса

Постановка задачи. Найти условие неустойчивости порядка m/n динамического процесса, описываемого обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

План решения

1. Даем функции $x(t)$, скорости $\dot{x}(t)$ и ускорению $\ddot{x}(t)$ малые независимые приращения. Линеаризуем уравнение.
2. Дифференцируем линеаризованное уравнение по времени.
3. Записываем систему полученных уравнений в матричном виде, относя в правую часть приращения производных порядка m и n .
4. Приравняем определитель системы нулю. Полученное уравнение является условием неустойчивости. Подставляем в условие заданное значение скорости. Определяем критическую координату. Если в условие неустойчивости входят вторые и третьи производные, то их надо выразить из исходного уравнения и его производной.

Пример. Дано уравнение некоторого динамического процесса:

$$16\ddot{x}\sqrt{\dot{x}} + b\dot{x} + x^4 = 0, \quad (10.1)$$

Определить условие неустойчивости процесса порядка $0/3$.

Решение

1. Даем функции $x(t)$, скорости $\dot{x}(t)$ и ускорению $\ddot{x}(t)$ малые независимые приращения. Линеаризуем уравнение¹

$$16\sqrt{\dot{x}}\Delta\ddot{x} + (8\ddot{x}/\sqrt{\dot{x}})\Delta\dot{x} + b\Delta\dot{x} + 4x^3\Delta x = 0, \quad (10.2)$$

¹В общем случае линеаризация функции n переменных $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ имеет вид $F + \sum_{i=1}^n F'_i \Delta u_i$, где F'_i — частная производная по i -му аргументу.

2. Дифференцируем линеаризованное уравнение по времени ¹

$$16\sqrt{x}\Delta\ddot{x} + (16\ddot{x}/\sqrt{x})\Delta\dot{x} + (8\dot{x}/\sqrt{x})\Delta\dot{x} - (4\ddot{x}^2/(\dot{x}\sqrt{x}))\Delta\dot{x} + b\Delta\ddot{x} + 4x^3\Delta\dot{x} + 12x^2\dot{x}\Delta x = 0. \quad (10.3)$$

3. Записываем систему полученных уравнений (10.2) – (10.3) в матричном виде, относя в правую часть приращения производных порядка 0 и 3

$$\begin{bmatrix} 8\dot{x}/\sqrt{x} + b & 16\sqrt{x} \\ 8\dot{x}/\sqrt{x} - 4\ddot{x}^2/(\dot{x}\sqrt{x}) + 4x^3 & 16\ddot{x}/\sqrt{x} + b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad (10.4)$$

где $\alpha_1 = -4x^3\Delta x$, $\alpha_2 = -12x^2\dot{x}\Delta x - 16\sqrt{x}\Delta\ddot{x}$.

4. Приравниваем определитель системы нулю. Полученное уравнение является условием неустойчивости.

$$128\ddot{x}\dot{x} + 4x^3\dot{x}\sqrt{x} - 192\ddot{x}^2 - 24b\ddot{x}\sqrt{x} = 0. \quad (10.5)$$

В условие неустойчивости (10.5) входят вторые и третьи производные. Выражаем ускорение из исходного уравнения (10.1)

$$\ddot{x} = -(b\dot{x} + x^4)/(16\sqrt{x}). \quad (10.6)$$

Дифференцируем по времени (10.6):

$$\ddot{x} = ((b\dot{x} + x^4)\ddot{x}/(\dot{x}\sqrt{x}) - 2(b\ddot{x} + 4x^3\dot{x})/\sqrt{x})/32. \quad (10.7)$$

Подставляем (10.6), (10.7). Получаем после преобразований

$$x^3(32 - \dot{x}^2\sqrt{x}) = 0. \quad (10.8)$$

При заданном значении скорости $\dot{x} = 1$ определяем два значения критической координаты $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Для этих значений динамическая система неустойчива по отношению к возмущению производных порядка 0 и 3, т.е. как угодно малое изменение этих величин приводит к неограниченному росту скоростей и ускорений.

Условия задач. Динамический процесс описывается дифференциальным уравнением. Найти условие неустойчивости порядка m/n . Вычислить значение $x_{m/n}$ при $\dot{x} = \dot{x}_0$.

¹Или дважды дифференцируем исходное уравнение, а затем линеаризуем. Операторы дифференцирования и линеаризации коммутативны.

1. $6\ddot{x}x + 2\dot{x} + x^2 = 0$, $m/n=(1/2)$, $\dot{x}_0 = 2$.
2. $3\ddot{x}x + 2\dot{x}^2 + x^2 = 0$, $m/n=(1/2)$, $\dot{x}_0 = 1$.
3. $2\ddot{x} + 3\dot{x}^2 + x = 0$, $m/n=(2/3)$, $\dot{x}_0 = 4$.
4. $4\ddot{x} + 3\dot{x} + x^2 = 0$, $m/n=(0/3)$, $\dot{x}_0 = 2$.
5. $3\ddot{x}\dot{x} + 4\dot{x} + x = 0$, $m/n=(1/3)$, $\dot{x}_0 = 2$.
6. $6\ddot{x}\dot{x} + 4x^2 + x = 0$, $m/n=(1/2)$, $\dot{x}_0 = 3$.
7. $6\ddot{x} - 5\dot{x} + \sqrt{x} = 0$, $m/n=(1/3)$, $\dot{x}_0 = 1$.
8. $3\ddot{x} + 5\sqrt{\dot{x}} + x = 0$, $m/n=(0/3)$, $\dot{x}_0 = 3$.
9. $5\ddot{x} + 6\dot{x}^2 + x\dot{x} = 0$, $m/n=(1/3)$, $\dot{x}_0 = 2$.
10. $2\ddot{x} + 6x + x\dot{x} = 0$, $m/n=(0/3)$, $\dot{x}_0 = 3$.

Ответы

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{m/n}$	2.000	1.414	-47.667	1.125	-4.000	-0.125	0.600	-12.471	-18.000	4.899

Maple – программа определения условия неустойчивости приведена на с. 293.

10.2. Условие стабильности процесса на плоскости

Постановка задачи. Динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений. Найти условие неустойчивости порядка m/n . Вывести уравнение кривой неустойчивости при $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.

План решения

1. Линеаризуем систему уравнений относительно приращений функций Δx , Δy , их скоростей $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$ и ускорений $\Delta\ddot{x}$, $\Delta\ddot{y}$.
2. Находим матрицу системы линейных относительно $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$ уравнений для точки неустойчивости порядка (0/2) или относительно Δx , Δy для точки неустойчивости порядка (1/2).
3. Приравняв нулю определитель полученной матрицы, записываем искомого условие неустойчивости. Если в это условие входят вторые производные функций, вычисляем их из заданной системы дифференциальных уравнений. Для получения окончательного выражения для условия подставляем в него значения заданных скоростей.