

9.5. Колебания грузов на упругой балке

Постановка задачи. Два груза массой m_1 и m_2 расположены на упругой балке. Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных малых поперечных колебаний грузов. Грузы считать материальными точками. Даны размеры и жесткость балки на изгиб.

В общем случае грузы на упругой балке могут совершать поперечные в двух направлениях и продольные колебания. Если грузы являются телами, а не материальными точками, и имеют моменты инерции, то возможны также крутильные колебания. Хотя постановка задачи о колебаниях грузов по одной оси является простейшей, она имеет практическое значение в решениях многих задач машиностроения, например, задачи о колебаниях вала турбины. В данной задаче система имеет две степени свободы. Принимая вертикальные (поперечные) смещения грузов в качестве обобщенных координат, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода (9.12), где $q_1 = y_1$, $q_2 = y_2$. Кинетическая энергия системы без учета массы балки имеет вид $T = m_1 \dot{y}_1^2/2 + m_2 \dot{y}_2^2/2$. Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{y}} + C\vec{y} = 0, \quad (9.15)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

C — матрица жесткости. Матрица обратная C — матрица податливости

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

коэффициенты которой (перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла–Мора:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EJ} dx, \quad (9.18)$$

где M_i — эпюра моментов в балке от единичной силы, приложенной по направлению перемещения i -го груза, EJ — жесткость балки на изгиб. Коэффициенты $\delta_{i,j}$ имеют простой физический смысл: $\delta_{i,j}$ — это вертикальное перемещение груза i под действием единичной вертикальной силы, приложенной в месте крепления груза j . По теореме Бетти $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$. Умножаем (9.15) на C^{-1}

$$C^{-1} A \ddot{\vec{y}} + \vec{y} = 0 \quad (9.19)$$

и делаем подстановку $\ddot{\vec{y}} = -\omega^2 \vec{y}$, что равносильно замене $y_i = A_i \sin(\omega t + \beta_0)$, $i = 1, 2$, где A_1, A_2 — амплитуды, ω — частота, β_0 — начальная фаза колебаний. Получаем однородную систему $B \vec{y} = 0$, имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Учитывая, что

$$C^{-1} A = \begin{bmatrix} \delta_{11} m_1 & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & \delta_{22} m_2 \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

получаем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 \delta_{11} + 1 & -\omega^2 m_2 \delta_{12} \\ -\omega^2 m_1 \delta_{21} & -\omega^2 m_2 \delta_{22} + 1. \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

Приравниваем нулю определитель, получаем частотное уравнение

$$\omega^4 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2 (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) + 1 = 0. \quad (9.22)$$

Частотное уравнение является биквадратным и имеет два положительных решения, отвечающее двум собственным частотам системы.

План решения

1. Строим эпюры от вертикальных единичных сил, приложенных в местах крепления грузов.

2. Используя формулу Максвелла–Мора (9.18), перемножаем эпюры по правилу Верещагина и получаем коэффициенты δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} .

3. Записываем частотное уравнение (9.22). Решаем его, получаем собственные частоты грузов.

Пример. Два груза массой $m_1 = 5$ кг и $m_2 = 10$ кг расположены на упругой балке, состоящей из двух частей, соединенных шарниром C (рис.233). Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных

малых колебаний грузов. Принять жесткость балки на изгиб $EJ = 1000 \text{ Нм}^2$. Размеры даны в сантиметрах.

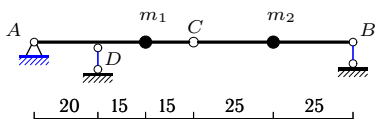


Рис. 233

Решение

1. Строим эпюры от вертикальных единичных сил, приложенных в местах крепления грузов. Прикладываем вертикальную единичную силу в точке крепления груза 1. Из условия равновесия находим реакции опор. Правая часть балки оказывается незагруженной, реакции ее опор равны нулю. Эпюра M_1 изображена на рис. 235.

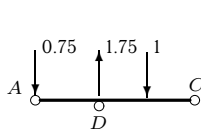


Рис. 234

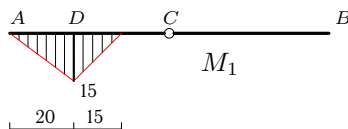


Рис. 235

Прикладываем вертикальную единичную силу в точке крепления груза 2. Из условия равновесия находим реакции опор. Рассматриваем отдельно левую и правую части. В отсутствии горизонтальных сил внутренний шарнир имеет только вертикальную реакцию, направленную для левой части вниз, а для правой вверх, рис. 236. Эпюра M_2 изображена на рис. 237. В промежуточном шарнире C эпюра не имеет излома, так как внешних сил в этой точке нет.

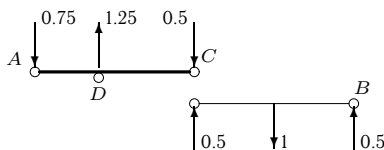


Рис. 236

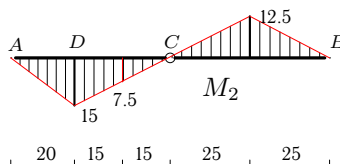


Рис. 237

2. Используя формулу Максвелла–Мора (9.18), перемножаем эпюры рис. 235, 237 по правилу Верещагина и получаем коэффициенты δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} . Площадь одной эпюры умножаем ординату другой под центром тяжести первой, ординату выделяем полужирным шрифтом. Размеры

берем в сантиметрах. Получаем

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{20 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \frac{15 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 \right) = \frac{2625}{EJ}, \\ \delta_{12} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{20 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 7.5 \right) \right) = \frac{2906.25}{EJ}, \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{20 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \frac{30 \cdot 15}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 15 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12.5 \right) = \frac{6354.167}{EJ},\end{aligned}\quad (9.23)$$

или $\delta_{11} = 2.625 \cdot 10^{-6}$ м/Н, $\delta_{12} = 2.906 \cdot 10^{-6}$ м/Н, $\delta_{22} = 6.354 \cdot 10^{-6}$ м/Н.

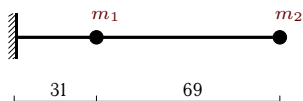
3. Записываем частотное уравнение (9.22)

$$0.412 \cdot 10^{-9} \omega^4 - 0.767 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 1 = 0.$$

Решаем уравнение, получаем собственные частоты грузов $\omega_1 = 118.798$ рад/с, $\omega_2 = 414.874$ рад/с/.

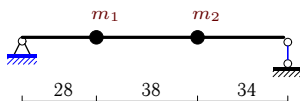
Условия задач. Два груза массой m_1 и m_2 расположены на упругой балке. Пренебрегая массой балки, определить частоты собственных малых поперечных колебаний грузов. Грузы считать материальными точками. Принять жесткость балки на изгиб $EJ = 1000$ Н·м². Размеры даны в сантиметрах.

1.



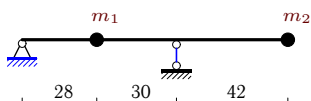
$m_1 = 11$ кг, $m_2 = 12$ кг.

2.



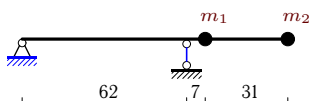
$m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг.

3.



$m_1 = 5$ кг, $m_2 = 7$ кг.

4.



$m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг.