

5. Строим эпюры моментов M_p и перерезывающих сил Q_p n пролетах и консолях (если они есть) балки от действия внешней нагрузки. Каждый пролет представляет собой отдельную статически определимую балку.

6. Вычисляем площади эпюр моментов Ω_i , $i = 1, \dots, n$ в пролетах и расстояния от центров тяжести этих площадей до левой (a_i) и правой (b_i) опоры соответствующего пролета.

7. Составляем систему уравнений¹ ($i = 1, \dots, n - 1$):

$$M_{i-1}l_i + 2M_i(l_i + l_{i+1}) + M_{i+1}l_{i+1} = -6 \left(\frac{\Omega_i a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \quad (8.24)$$

8. Решаем систему уравнений трех моментов. Находим моменты в балке над лишними опорами M_i , $i = 1, \dots, n - 1$.

9. Строим эпюру моментов m_1 от действия реакций M_i , $i = 1, \dots, n - 1$. Эпюра моментов представляет собой ломаную с координатами угловых точек (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n+2$, где x_i , $i = 1, \dots, n+1$ — координаты опор, x_0, x_{n+2} — координаты концов балки; $y_0 = y_{n+2} = 0$, $y_i = M_{i-1}$, $i = 1, \dots, n+1$ — моменты, полученные из решения системы уравнений трех моментов и из условия равновесия консолей (M_0 и M_n).

10. Складываем эпюры M_p и m_1 . Получаем искомую эпюру моментов в неразрезной балке.

11. Строим эпюру перерезывающих сил по формуле

$$Q_i = Q_{pi} + (M_i - M_{i-1})/l_i, \quad (8.25)$$

для пролетов $i = 1, \dots, n$, где Q_{pi} — перерезывающие силы в простой балке.

Пример. К многопролетной статически неопределимой балке (рис. 170) приложена вертикальная сила $P = 9$ кН и равномерно распределенная нагрузка $q_1 = 12$ кН/м, $q_2 = 10$ кН/м. Размеры даны в метрах. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил.

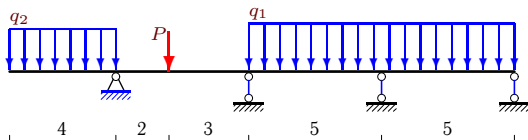


Рис. 170

Решение

1. Определяем степень статической неопределимости по формуле $C - 3$, где C — число связей. Балка имеет $C = 5$ связей — три

¹Уравнения трех моментов.

вертикальные опоры и неподвижная опора (две связи). Таким образом, $C - 3 = 2$, балка дважды статически неопределима.

2. Разрезаем балку на отдельные части (*простые балки*), врезая внутренние шарниры в местах крепления опор (рис. 171). Обозначаем реакции образовавшихся связей — моменты $M_0, M_1, \dots, M_n$.

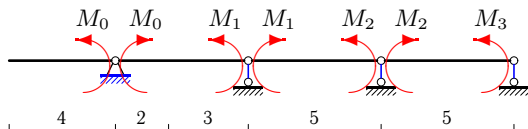
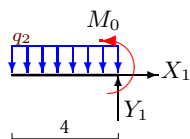


Рис. 171

3. Нумеруем пролеты. Число пролетов равно 3. Левая консоль — нулевой пролет. Длины пролетов $l_0 = 4$ м, $l_1 = l_2 = l_3 = 5$ м.

4. Из условия равновесия консоли определяем M_0 (рис. 172).

Записываем уравнение моментов относительно опоры



$$\sum M_A = q_2 \cdot 4 \cdot 2 + M_0 = 0.$$

Получаем $M_0 = -80$ кНм. Правая консоль в балке отсутствует, следовательно, $M_3 = 0$. Остальные моменты являются неизвестными системы $n - 1 = 2$ уравнений трех моментов.

5. Строим эпюры моментов M_p и перерезывающих сил Q_p в трех пролетах и консоли от действия внешней нагрузки. Каждый пролет представляет собой отдельную статически определимую балку (рис. 173–175).

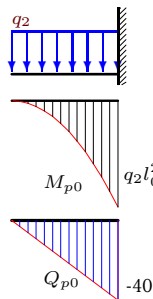


Рис. 173

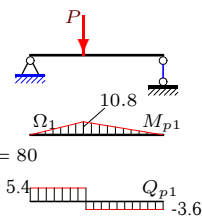


Рис. 174

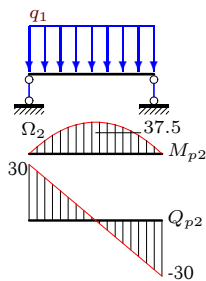


Рис. 175

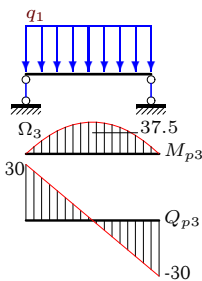


Рис. 176

Высота треугольной эпюры в полете 1 равна $P \cdot 2 \cdot 3/5 = 10.8$. Максимальные значения эпюр в пролетах 2 и 3 равны $f = q_1 l_2^2/8 = q_1 l_3^2/8 = 37.5$ кНм.

6. Вычисляем площади эпюр моментов Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , в пролетах и расстояния от центров тяжести этих площадей до левой (a_i) и правой (b_i), $i = 1, 2, 3$, опоры соответствующего пролета.

$$\Omega_1 = 9 \cdot 2 \cdot 3/2 = 18, \quad a_1 = (2 + 5)/3 = 2.333, \quad b_1 = l_1 - a_1 = 2.667, \\ \Omega_2 = \Omega_3 = 2fl_2/3 = 125, \quad a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 2.5.$$

7. Составляем систему уравнений

$$l_1 M_0 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(\Omega_1 a_1/l_1 + \Omega_2 b_2/l_2), \\ l_2 M_1 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(\Omega_2 a_2/l_2 + \Omega_3 b_3/l_3). \quad (8.26)$$

Подставляем численные значения длин, моментов и площадей

$$-400 + 20M_1 + 5M_2 = -450.6, \\ 5M_1 + 20M_2 = -750. \quad (8.27)$$

8. Решаем систему уравнений (8.27). Находим моменты $M_1 = 7.301$ кНм, $M_2 = -39.325$ кНм.

9. Строим эпюру моментов m_1 от действия реакций M_1 , M_2 .

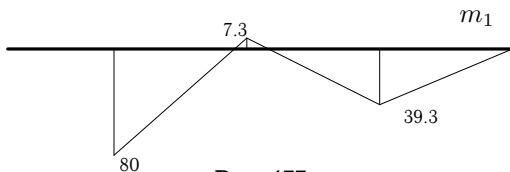


Рис. 177

10. Складываем эпюры M_p (рис. 173–175) и m_1 (рис. 177). Получаем искомую эпюру моментов в неразрезной балке (рис. 178)

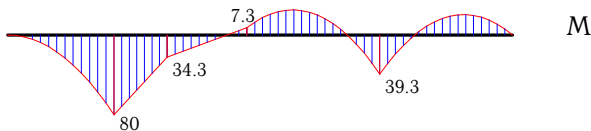


Рис. 178

Значение момента в точке приложения силы P вычисляем по формуле $(80 + 7.301)/5 \cdot 2 + 10.8 - 80 = 34.279$ кНм.

11. Строим эпюру перерезывающих сил. Для пролетов 1, 2, 3 имеем следующие добавки к перерезывающим силам в простой балке

$$Q_1 = Q_{p1} + (M_1 - M_0)/l_1 = Q_{p1} + (7.301 - (-80))/5 = Q_{p1} + 17.46,$$

$$Q_2 = Q_{p2} + (M_2 - M_1)/l_2 = Q_{p2} + (-39.325 - 7.301)/5 = Q_{p2} - 9.325,$$

$$Q_3 = Q_{p3} + (M_3 - M_2)/l_3 = Q_{p3} + (0 - (-39.325))/5 = Q_{p3} + 7.865.$$

В итоге получаем эпюру перерезывающих сил в неразрезной балке (рис. 179)

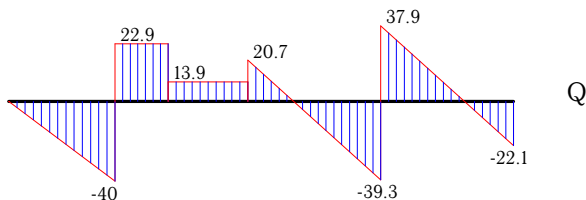


Рис. 179

Замечание 1. С помощью эпюры перерезывающих можно найти реакции опор и выполнить проверку решения. Рассматриваем равновесие элементов балки, вырезанных над опорами. Действие опор заменяем их реакциями Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 (рис. 180 – 183). Значения перерезывающих сил, возникающих как реакции при вырезании элемента, берем из эпюры моментов перерезывающих сил в неразрезной балке (рис. 179). С учетом принятых знаков для Q (положительные перерезывающие силы вращают элемент балки, к которому они приложены по часовой стрелке), имеем

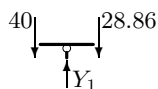


Рис. 180

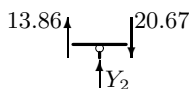


Рис. 181

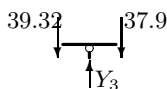


Рис. 182

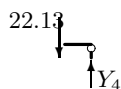


Рис. 183

Условия равновесия дают

$$Y_1 = 40 + 22.86 = 62.86, \quad Y_2 = -13.86 + 20.67 = 6.81,$$

$$Y_3 = 39.32 + 37.86 = 77.19, \quad Y_4 = 22.14.$$

В проекции на вертикальную ось записываем сумму проекцию всех внешних сил, действующих на балку,

$$\begin{aligned} \sum Y_k &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - P - 4q_2 - 10q_1 = \\ &= 62.86 + 6.81 + 77.19 + 22.14 - 9 - 40 - 120 = 0. \end{aligned}$$

Проверка выполнена. Сумма проекций действительно равна нулю.

Замечание 2. С помощью уравнений трех моментов можно рассчитывать и статически неопределимые консоли. К примеру, имеем дважды статически неопределимую консоль (рис. 184).

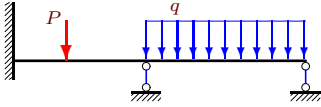


Рис. 184

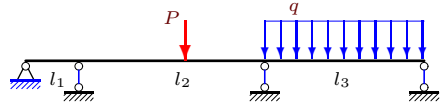


Рис. 185

Заменяем заделку двумя опорами, одна из которых находится в начале балки, другая, дополнительная на расстоянии l_1 левее заделки (рис. 185). Полагая в (8.26) длину l_1 фиктивного пролета равной нулю, и считая $\Omega_1 = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 2M_1 l_2 + M_2 l_2 &= -6\Omega_2 b_2 / l_2, \\ l_2 M_1 + 2M_2 (l_2 + l_3) &= -6(\Omega_2 a_2 / l_2 + \Omega_3 b_3 / l_3). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Из решения получаем момент в заделке M_1 и момент над средней опорой M_2 .

Замечание 3. Как и для всякого расчета методом сил, для решения, полученного с помощью уравнения трех моментов, можно выполнить кинематическую проверку. Для этого надо единичную эпюру какой-либо основной системы умножить на полученную эпюру моментов в неразрезной балке. Произведение эпюр, выражающее прогиб по направлению выбранной силы, приложенной в одной из опор, должно быть равно нулю, так как на опоре перемещение отсутствует. Наиболее очевидной является основная система с отброшенными промежуточными (лишними) опорами. Для рассматриваемого примера имеем следующий вариант основной системы с неизвестными Y_2 и Y_3 (здесь для неизвестных метода сил мы придерживаемся обозначений реакций опор, принятых на рис. 180 – 183, а не стандартных X_1 и X_2)

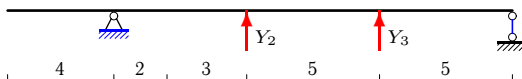


Рис. 186

Строим эпюру от действия единичной силы по направлению реакции опоры Y_2

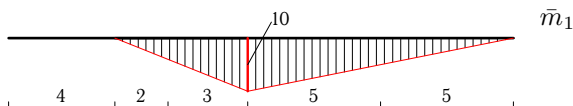


Рис. 187

Умножаем эпюру M на рис. 178 и эпюру $\bar{m}_1$ по правилу Верещагина. Чтобы не усложнять вычислений с дробными величинами, возникающими из-за того, что высота треугольной эпюры равна $10/3$, умножим эту эпюру на 3, что фактически соответствует тестированию системы не на единичную силу, а на силу, равную 3. В любом случае перемещение не зависит от величины силы и должно быть нулевым. Выделяем для наглядности результат умножения отдельных участков в отдельные строчки. По правилу Верещагина умножается площадь одной эпюры на ординату другой под центром тяжести первой. Умножение прямолинейных фигур коммутативно, но если одна из эпюр содержит параболу, то площадь берем именно этой эпюры. Получаем

$$\begin{aligned} \Delta_y = & \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 34.279 + \frac{1}{3} \cdot 80 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 34.279 - \frac{1}{3} \cdot 7.301 \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \left(\frac{1}{3} \cdot 34.279 - \frac{2}{3} \cdot 7.301 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 39.325 \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{10}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot 7.301 \cdot 5 \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) - \Omega_2 \cdot \frac{5+10}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot 39.325 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \Omega_3 \cdot \frac{5}{2} = 0, \end{aligned}$$

где площадь, ограниченная параболой, $\Omega_2 = \Omega_3 = (2/3) \cdot f \cdot 5$, $f = q_1 l_2^2 / 8 = 37.5$

Maple-программа для решения этой задачи дана на с. 339.

Условия задач. Построить эпюры моментов и перерезывающих сил в многопролетной балке. К балке приложена равномерно распределенная нагрузка вертикальная сила. Размеры даны в метрах.