.

12.2. Кинетическая энергия механической системы

Постановка задачи. *Выразить кинетическую энергию механической системы с одной степенью свободы через угловую скорость одного из тел системы или линейную скорость какой-либо ее точки.*

План решения

1. Составляем кинематические графы системы. Угловые скорости тел системы и линейные скорости их центров масс выражаем через заданную скорость.

2. Вычисляем кинетические энергии отдельных тел системы. Для тела, совершающего поступательное движение, кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2}, \tag{1}$$

где m — масса тела, v — скорость любой его точки. Напомним, что при поступательном движении скорости всех точек тела равны, а угловая скорость равна нулю. Кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение с угловой скоростью ω,

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{2}$$

J — момент инерции тела относительно оси вращения. Напомним, что у однородного цилиндра радиуса R момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, $J = mR^2/2$, однородного стержня длиной a, относительно середины $J = ma^2/12$, а относительно конца $J = ma^2/3$.

Моменты инерции тела относительно параллельных осей связаны соотношением $J = J_c + h^2 m$, где J_c — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, h — расстояние между осями. Если известен радиус инерции i тела массы m, то его момент инерции $J = mi^2$.

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение,

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}, \tag{3}$$

где v_c — скорость центра масс тела, J_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс. В частности, кинетическая энергия однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания по неподвижной плоскости, вычисляется по формуле

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2(v_c/R)^2}{4} = \frac{3mv_c^2}{4}. \tag{4}$$

3. Кинетическую энергию системы вычисляем как сумму кинетических энергий отдельных тел:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

Пример 1. Выразить кинетическую энергию механической системы с одной степенью свободы (рис. 1) через угловую скорость $\dot{\varphi}$. Система состоит из двух однородных цилиндров 1 и 2, радиусом R, соединенных двухзвенником ABC. Невесомый стержень AB жестко

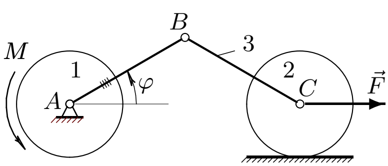


Рис. 1

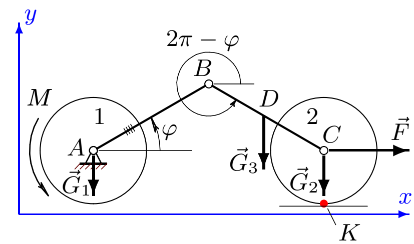


Рис. 2

соединен с цилиндром 1. Массы цилиндров 1 и 2 равны m_1 и m_2, масса однородного стержня BC — m_3. Качение цилиндра происходит без проскальзывания и сопротивления, $AB = BC = a$. На цилиндр 1 действует момент M, к оси C приложена горизонтальная сила F[1]

[1]Условие задачи содержит избыточные данные — M, F. Они потребуются в дальнейшем для составления нелинейного уравнения движения этой системы.

Решение

1. Составляем кинематические графы системы:

$$A \xrightarrow[\varphi]{AB} B \xrightarrow[2\pi-\varphi]{3} C\,; \quad C \xrightarrow[\pi-\varphi]{CD} D\,; \quad C \xrightarrow[3\pi/2]{2} K$$

Записываем соответствующие им кинематические уравнения в проекциях на оси x и y (рис. 2):

$$\begin{aligned}
v_{Cx} &= v_{Ax} - \dot\varphi AB\sin\varphi - \omega_{BCz}BC\sin(2\pi-\varphi),\\
v_{Cy} &= v_{Ay} + \dot\varphi AB\cos\varphi + \omega_{BCz}BC\cos(2\pi-\varphi),\\
v_{Dx} &= v_{Cx} - \omega_{BCz}CD\sin(\pi-\varphi),\\
v_{Dy} &= v_{Cy} + \omega_{BCz}CD\cos(\pi-\varphi),\\
v_{Kx} &= v_{Cx} - \omega_C R\sin(3\pi/2),\\
v_{Ky} &= v_{Cy} + \omega_C R\cos(3\pi/2).
\end{aligned} \tag{2}$$

Точка K является МЦС цилиндра 2. С учетом кинематических связей $v_{Kx} = v_{Ky} = v_{Ax} = v_{Ay} = 0$, $v_{Cy} = 0$ из системы (2) получаем выражения скоростей точек C, D и угловой скорости ω_{BCz}:

$$\omega_{BCz} = -\dot\varphi,\ v_{Cx} = -2a\,\dot\varphi\sin\varphi,\ v_{Dx} = -\frac{3}{2}a\,\dot\varphi\sin\varphi,\ v_{Dy} = \frac{1}{2}a\dot\varphi\,\cos\varphi.$$

2. Вычисляем кинетическую энергию тел системы. Цилиндр 1 масса которого m_1, а момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр масс, $J_1 = m_1R^2/2$, имеет кинетическую энергию

$$T_1 = \frac{J_1\dot\varphi^2}{2} = \frac{\dot\varphi^2R^2m_1}{4}.$$

Кинетическая энергия однородного цилиндра 2, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности

$$T_2 = \frac{3m_2v_C^2}{4} = 3m_2\dot\varphi^2a^2\sin^2\varphi.$$

Кинетическая энергия плоского движения стержня BC, центр масс которого находится в точке D,

$$T_3 = \frac{m_3v_D^2}{2} + \frac{J_{BC}\omega_{BCz}^2}{2} = \frac{m_3(v_{Dx}^2+v_{Dy}^2)}{2} + \frac{m_3a^2\omega_{BCz}^2}{24} = \\ = m_3\dot\varphi^2a^2(1/6+\sin^2\varphi).$$

3. Кинетическую энергию системы вычисляем как сумму кинетических энергий отдельных тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \dot{\varphi}^2 \left(a^2(3m_2 + m_3)\sin^2\varphi + m_1R^2/4 + m_3a^2/6\right).$$

Пример 2. Однородный диск 1 массой m_1 радиусом R шарнирно соединен в точке A с вертикально движущимся штоком 2 массой m_2.

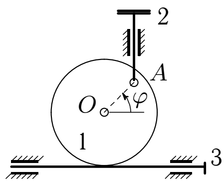


Рис. 3

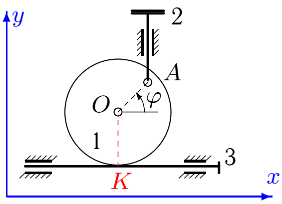


Рис. 4

Диск катится по горизонтальному штоку 3 массой m_3 без проскальзывания; $OA = a$; $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Выразить кинетическую энергию механической системы (рис. 3) через угловую скорость $\dot{\varphi}$.

Решение

1. Составляем кинематические графы системы: $K \xrightarrow[\pi/2]{1} O \xrightarrow[\varphi]{1} A$, $K \xrightarrow[\pi/2]{1} O$. Записываем соответствующие им кинематические уравнения в проекциях на оси x и y (рис. 4)

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Kx} - \dot{\varphi}R\sin(\pi/2) - \dot{\varphi}a\sin\varphi, \quad & v_{Ox} &= v_{Kx} - \dot{\varphi}R\sin(\pi/2), \\ v_{Ay} &= v_{Ky} + \dot{\varphi}R\cos(\pi/2) + \dot{\varphi}a\cos\varphi, \quad & v_{Oy} &= v_{Ky} + \dot{\varphi}R\cos(\pi/2). \end{aligned} \tag{3}$$

По условию задачи $v_{Ky} = 0$ и $v_{Ax} = 0$. Используя эти соотношения (кинематические связи) получаем из (3)

$$v_{Ay} = \dot{\varphi}a\cos\varphi, \;\; v_{Ox} = \dot{\varphi}a\sin\varphi, \;\; v_{Kx} = \dot{\varphi}(R + a\sin\varphi). \tag{4}$$

2. Вычисляем кинетическую энергию тел системы. Цилиндр 1, масса которого m_1, а момент инерции относительно оси вращения $J_1 = m_1R^2/2$, имеет кинетическую энергию

$$T_1 = \frac{J_1\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1v_O^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2R^2m_1}{4} + \frac{\dot{\varphi}^2a^2m_1\sin^2\varphi}{2}.$$

Кинетическая энергия штока 2 — $T_2 = m_2v_{Ay}^2/2 = (1/2)m_2\dot{\varphi}^2a^2\cos^2\varphi$,

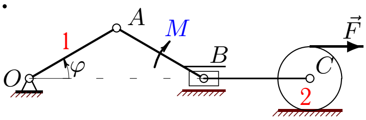
кинетическая энергия штока 3 — $T_3 = m_3v_{Kx}^2/2 = m_3\dot{\varphi}^2(R{+}a\sin\varphi)^2/2$.

3. Кинетическую энергию системы вычисляем как сумму кинетических энергий отдельных тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 0.5\dot{\varphi}^2 m(0.5R^2 + a^2 + (R + a\sin\varphi)^2).$$

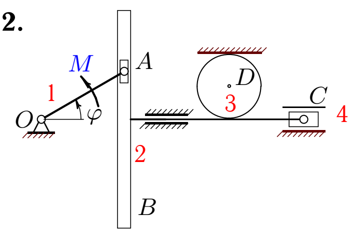
Условия задач. *Выразить кинетическую энергию механической системы с одной степенью свободы через угловую скорость $\dot{\varphi}$. Все диски (цилиндры) считать однородными. Качение происходит без проскальзывания.*

1.



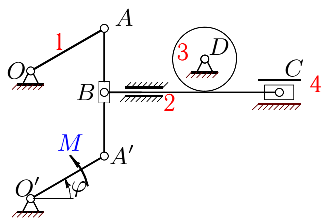
Механизм приводится в движение моментом M. Кривошип OA имеет массу m_1, диск C — m_2; $OA = AB = = a$, массой ползуна B, стержней AB и BC пренебречь.

2.



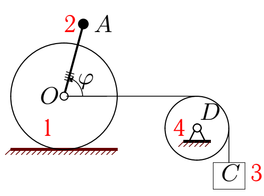
Механизм приводится в движение моментом M. Ползун A считать невесомым, кривошип OA имеет массу m_1, кулиса B — m_2, диск D — m_3, ползун C — m_4; $OA = a$.

3.



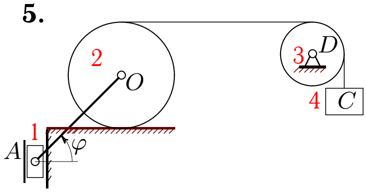
Шарнирный параллелограмм приводится в движение моментом M. Спарник AA' считать невесомым, звенья OA и $O'A'$ имеют одинаковую массу m_1. Ползун B вместе со стержнем BC имеет массу m_2, масса диска D — m_3, ползуна C — m_4; $OA = a$.

4.



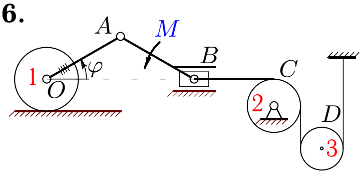
Диск O радиусом R массой m_1 соединен с невесомым стержнем $OA = a$, на конце которого закреплен груз A массой m_2. Груз C имеет массу m_3, шкив D — m_4.

5.



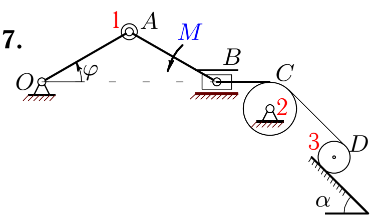
Ползун A массой m_1, скользящий по гладкой вертикальной поверхности, соединен с центром цилиндра O невесомым стержнем $AO = a$. Цилиндр O имеет массу m_2, диск D — m_3, груз C — m_4.

6.



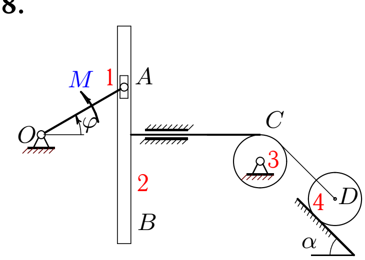
Диск O радиусом R, имеющий массу m_1, соединен с невесомым стержнем OA. Механизм приводится в движение моментом M. Массы дисков C и D m_2 и m_3, $OA = AB = a$, массой ползуна B и стержня AB пренебречь.

7.



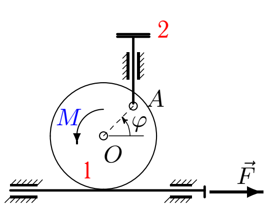
Механизм приводится в движение моментом M. Кривошип OA считать невесомым. В шарнире A сосредоточена масса m_1. Массы дисков C и D — m_2 и m_3; $OA = AB = a$, массой ползуна B и стержня AB пренебречь.

8.

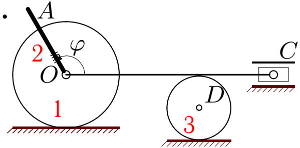


Механизм приводится в движение моментом M. Кривошип OA считать невесомым. Ползун A имеет массу m_1, кулиса B — m_2, массы дисков C и D — m_3 и m_4; $OA = a$.

9.



Однородный диск 1 массой m_1 радиусом R шарнирно соединен в точке A с вертикально движущимся штоком 2 массой m_2. Диск без сопротивления катится по горизонтальному штоку; $OA = a$. К горизонтальному штоку приложена сила F, к диску — момент M.

10. 

Диск O радиусом R массой m_1 соединен с однородным стержнем $OA = a$ массой m_2. Масса диска D — m_3. Массой ползуна и стержня OC пренебречь.

Ответы

1. $T = \dot{\varphi}^2 a^2/2(m_1/3 + 6m_2 \sin^2\varphi)$.

2. $T = \dot{\varphi}^2 a^2/2(m_1/3 + (m_2 + 3m_3/8 + m_4)\sin^2\varphi)$.

3. $T = \dot{\varphi}^2 a^2/2(2m_1/3 + (m_2 + m_3/2 + m_4)\sin^2\varphi)$.

4. $T = \dot{\varphi}^2/2(R^2(3m_1/2 + m_2 + m_3 + m_4/2) + a^2 m_2 + 2Ram_2 \sin\varphi)$.

5. $T = \dot{\varphi}^2 a^2/2(m_1 + (-m_1 + 3m_2/2 + 2m_3 + 4m_4)\sin^2\varphi)$.

6. $T = \dot{\varphi}^2/2(3R^2 m_1/2 + (R + 2a\sin\varphi)^2(m_2 + 3m_3/4)/2)$.

7. $T = \dot{\varphi}^2 a^2/2(m_1 + (2m_2 + 3m_3/2)\sin^2\varphi)$.

8. $T = \dot{\varphi}^2 a^2/2(m_1 + (m_2 + m_3/2 + 3m_4/2)\sin^2\varphi)$.

9. $T = \dot{\varphi}^2/2(m_1 R^2/2 + m_2 a^2 + a^2(m_1 - m_2)\sin^2\varphi)$.

10. $T = \dot{\varphi}^2/2(3R^2 m_1/2 + m_2(R^2 + aR\sin\varphi + a^2/3) + 3/8\, m_3 R^2)$.